



คณิตศาสตร์ สำหรับวิทยาศาสตร์ สิ่งแวดล้อมและทรัพยากรชาติ

Mathematics for Environmental Science
and Natural Resources



ผศ.ดร.วัลลภา วงศ์ศีลธรรม



คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อม
และทรัพยากรธรรมชาติ
Mathematics for Environmental
Science and Natural Resources

ผศ.ดร.วัลลภา วงศ์ศีลธรรม

มหาวิทยาลัยขอนแก่น
2565

คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อมและทรัพยากรธรรมชาติ
Mathematics for Environmental Science and Natural Resources
ผศ.ดร.วัลลภา วงศ์ศีลธรรม

ISBN 978-616438-739-3

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ
National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

วัลลภา วงศ์ศีลธรรม.

คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อมและทรัพยากรธรรมชาติ. -- หนองคาย :
คณะสหวิทยาการ มหาวิทยาลัยขอนแก่น วิทยาเขตหนองคาย, 2565.
236 หน้า.

1. วิทยาศาสตร์ -- คณิตศาสตร์ -- การศึกษาและการสอน (อุดมศึกษา). I. ชื่อเรื่อง.

ISBN 978-616-438-739-3

ลิขสิทธิ์เป็นของผู้เขียน

การนำไปใช้เพื่อประโยชน์ในการเรียนการสอน สามารถทำได้โดยอ้างอิงแหล่งที่มา
สงวนลิขสิทธิ์ ห้ามนำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า นอกจากได้รับอนุญาต

พิมพ์ครั้งที่ 1 พฤษภาคม พ.ศ. 2565

จำนวน 350 เล่ม

ราคา 250 บาท

พิมพ์ที่ โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยขอนแก่น

123 ถ.มิตรภาพ ต.ในเมือง อ.เมือง จ.ขอนแก่น รหัสไปรษณีย์ 40002

โทรศัพท์/โทรสาร 043-202100 มือถือ 099-4655115 ภายใน 44770

คำนำ

สิ่งแวดล้อม (Environmental) หมายถึง ทุกสิ่งทุกอย่างที่อยู่ล้อมรอบตัวมนุษย์ มีทั้งสิ่งที่มีชีวิตและสิ่งที่ไม่มีชีวิต ทั้งสิ่งที่เป็นรูปธรรมและสิ่งที่เป็นนามธรรม มีทั้งสิ่งที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติและสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น มีอิทธิพลเกี่ยวโยงถึงกัน เป็นปัจจัยในการเกื้อกูลซึ่งกันและกัน ผลกระทบจากปัจจัยหนึ่งมีส่วนเสริมสร้างหรือทำลายปัจจัยอื่นอย่างหลีกเลี่ยงมิได้ เป็นวงจรหรือวัฏจักรที่เกี่ยวเนื่องกันทั้งระบบ สิ่งแวดล้อมของมนุษย์ที่อยู่รอบ ๆ ตัว ทั้งสิ่งที่มีชีวิตและไม่มีชีวิต แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ 1.) สิ่งแวดล้อมทางธรรมชาติ และ 2.) สิ่งแวดล้อมทางวัฒนธรรม หรือสิ่งแวดล้อมประดิษฐ์ หรือมนุษย์เสริมสร้างกำหนดขึ้น ถ้าแบ่งตามสิ่งแวดล้อมธรรมชาติ สามารถจำแนกได้ 2 ชนิด คือ 1.) สิ่งแวดล้อมทางกายภาพ ได้แก่ อากาศ ดิน ลักษณะภูมิประเทศ ลักษณะ ภูมิอากาศ ทัศนียภาพต่าง ๆ ภูเขา ห้วย หนอง คลอง บึง ทะเลสาบ ทะเล มหาสมุทรและทรัพยากรธรรมชาติทุกชนิด เป็นต้น และ 2.) สิ่งแวดล้อมทางชีวภาพหรือชีวภูมิศาสตร์ ได้แก่ พืชพันธุ์ธรรมชาติต่าง ๆ สัตว์ป่า ป่าไม้ สิ่งมีชีวิตอื่น ๆ ที่อยู่รอบตัวเราและมวลมนุษย์ เป็นต้น ปัญหาทางสิ่งแวดล้อมและทรัพยากรธรรมชาติ เป็นปรากฏการณ์ที่ก่อให้เกิดความเสียหายต่าง ๆ ได้อย่างมากมาย มีผลต่อความเป็นอยู่ของมนุษย์และสิ่งมีชีวิตบนโลก ทั้งยังเกี่ยวโยงถึงสภาพเศรษฐกิจและสังคม นอกจากนี้ ยังส่งผลให้เกิดมลพิษต่อสิ่งแวดล้อมที่เป็นผลเสียโดยตรงต่อสิ่งมีชีวิต จะเห็นได้ว่าในปัจจุบันนี้ มีปัญหาทางสิ่งแวดล้อมต่าง ๆ มากมายที่รอการแก้ไข ซึ่งถ้าวิเคราะห์เชิงลึกจะเห็นได้ว่า สาเหตุหลักของปัญหาสิ่งแวดล้อมมักเกิดจากจำนวนประชากรที่เพิ่มมากขึ้น การขยายตัวทางเศรษฐกิจ ความก้าวหน้าทางด้านเทคโนโลยี และเกิดจากภัยธรรมชาติ ซึ่งบางปัญหาที่เกิดขึ้นทำให้ระบบสิ่งแวดล้อมและทรัพยากรธรรมชาติเกิดความเสียหาย ดังนั้น จึงจำเป็นต้องทำการแก้ไขอย่างเร่งด่วน แต่บางครั้งการแก้ปัญหาทางตรงโดยใช้การทดลองทางวิทยาศาสตร์เป็นเรื่องที่ยากและต้องใช้เวลาจึงไม่สามารถแก้ปัญหาบางปัญหาได้อย่างทันที่ ดังนั้น วิธีการแก้ปัญหาอีกหนึ่งช่องทางจึงจำเป็นต้องใช้ศาสตร์วิชาอื่น ๆ มาร่วมแก้ปัญหานั้นด้วย เช่น คณิตศาสตร์ และคอมพิวเตอร์ เป็นต้น

คณิตศาสตร์ (Mathematics) เป็นวิชาที่อธิบายแบบเป็นเหตุและผล เป็นศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างสรรค์สิ่งต่าง ๆ การแก้ปัญหา (Problem Solving) ทั้งในด้านชีวิตประจำวันและด้านอื่น ๆ การใช้เหตุผลจึงต้องอาศัยทักษะทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานทั้งสิ้น ในภาษากรีก Math หมายถึงการเรียนรู้ (Learning) ในปัจจุบัน ปัญหาส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันมีวิธีการแก้ปัญหาโดยอาศัยหลักของเหตุและผล ซึ่งอาศัยรูปแบบ (Model) ความคิดทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ ซึ่งจำเป็นต้องมีข้อมูลในระดับหนึ่งมาช่วยในการตัดสินใจ หลักการของการแก้ปัญหาใด ๆ ก็ตาม คือ การนำกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ที่เป็นจริง เป็นความรู้ เป็นทฤษฎีต่าง ๆ ซึ่งก็คือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์นั่นเองมา

ใช้ประกอบกับข้อมูลที่มีอยู่ในระดับหนึ่งในการสรุปคำตอบของปัญหาที่ต้องการ อย่างไรก็ตาม การแก้ปัญหานี้เป็นกลไกที่เกิดขึ้นในสมองของแต่ละคน แม้ว่าคำตอบที่ได้จะเหมือนกัน แต่ในด้านของกระบวนการคิดของแต่ละบุคคลนั้นจะแตกต่างกัน ซึ่งต้องอาศัยพื้นฐานความคิดทางคณิตศาสตร์ แต่เหตุผลอาจมีความแตกต่างกันได้ กลไกที่ใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการแก้ปัญหาเพื่อให้บรรลุถึงการพัฒนาต่าง ๆ ก็คือ คอมพิวเตอร์ ซึ่งการที่จะเป็นนักคอมพิวเตอร์หรือการนำคอมพิวเตอร์ไปประยุกต์ใช้กับงานด้านต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นการสื่อสาร โทรคมนาคม และสิ่งประดิษฐ์ซึ่งล้วนต้องอาศัยความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น ดังนั้น การที่จะสร้างและพัฒนาคนให้สามารถสร้างประโยชน์ต่อประเทศชาติได้ไม่ว่าในด้านใดก็ตาม ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานที่สำคัญ ถึงแม้ว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ค่อนข้างเป็นนามธรรม แต่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวางมาก และเป็นทักษะที่จำเป็นต้องมีการเรียนรู้และพัฒนาอย่างต่อเนื่อง

ตำรารายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อมและทรัพยากรธรรมชาติ (Mathematics for Environmental Science and Natural Resources) จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการจัดการเรียนการสอนให้กับนักศึกษาระดับปริญญาตรีในหลักสูตรวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อมและทรัพยากรธรรมชาติ คณะสหวิทยาการ มหาวิทยาลัยขอนแก่น ซึ่งอาจเป็นประโยชน์ถึงนักศึกษาระดับบัณฑิตศึกษาในหลักสูตรอื่น ๆ ที่มีความเกี่ยวข้องด้วย โดยเนื้อหาในตำราคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อมและทรัพยากรธรรมชาติเล่มนี้เป็นการเขียนในลักษณะที่มีข้อมูลอันประกอบด้วยเนื้อหา บทนิยาม ทฤษฎีบท บทตั้ง บทแทรก ตัวอย่างประกอบและโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับปัญหาจริงที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน โดยจะใช้วิธีการทางด้านคณิตศาสตร์พื้นฐานจนถึงระดับสูงในการแก้ปัญหาหรือหาคำตอบของปัญหานั้น ๆ และการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้านสิ่งแวดล้อม ซึ่งมุ่งเน้นให้ผู้อ่านมีความรู้ ความเข้าใจและใช้ประกอบการฝึกปฏิบัติ โดยเนื้อหาบางส่วนได้เรียบเรียงจากประสบการณ์จากการจัดการเรียนการสอนและการทำงานวิจัยของผู้เขียน รวมทั้งจากการศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมจากตำราวิชาการทั้งของไทยและต่างประเทศ

ตำราเล่มนี้ประกอบด้วยเนื้อหาทั้งหมด 7 บท อันประกอบด้วย บทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียว บทที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว บทที่ 3 การประยุกต์ของอนุพันธ์และผลต่างอนุพันธ์ บทที่ 4 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวและการประยุกต์ บทที่ 5 เทคนิคของการหาปริพันธ์ บทที่ 6 อนุพันธ์ย่อย และบทที่ 7 สมการเชิงอนุพันธ์และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้านสิ่งแวดล้อม ซึ่งผู้เขียนได้นำเสนอด้วยภาษาคณิตศาสตร์ที่เข้าใจง่าย อธิบายเป็นขั้นเป็นตอน มีตัวอย่างประกอบ และมีแบบฝึกหัดให้ฝึกทำด้วยตนเองพร้อมมีเฉลยแบบฝึกหัดท้ายเล่ม ด้วยความตั้งใจของผู้เขียนที่ต้องการให้ผู้อ่านเข้าใจคณิตศาสตร์พื้นฐานจนถึงระดับสูงในการแก้ปัญหาด้านสิ่งแวดล้อมได้ด้วยตนเอง รวมถึงการใช้คณิตศาสตร์พื้นฐานจนถึงระดับสูงในการประยุกต์ใช้ในงานวิจัยต่าง ๆ

ผู้เขียนหวังว่าตำราเล่มนี้ จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้อ่านไม่มากนักน้อยในการใช้เป็นคู่มือสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์พื้นฐานจนถึงระดับสูง และสามารถประยุกต์ใช้วิธีการคำนวณต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาด้านสิ่งแวดล้อมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องได้ ทั้งนี้หากมีข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงตำราเล่มนี้ กรุณาแจ้งต่อผู้เขียนจักเป็นพระคุณยิ่ง ผู้เขียนขอยกความดีที่เกิดจากตำราเล่มนี้บูชาแด่ครูอาจารย์ทุกท่าน รวมทั้งบิดา-มารดาผู้เป็นครูคนแรก ขอมอบให้ผู้มีพระคุณทุกท่านทั้งที่ได้ระบุและมิได้ระบุนามไว้ ณ ที่นี้ รวมทั้งผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่มีส่วนช่วยให้ตำราเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ผศ.ดร.วัลลภา วงศ์ศีลธรรม

สารบัญ

คำนำ	i	
1	ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียว	2
1.1	นิยามและทฤษฎีบทของลิมิต	2
1.2	ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์	12
1.3	ความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียว	20
1.4	บทสรุปท้ายบทที่ 1	23
1.5	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	23
2	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว	28
2.1	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว	28
2.2	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปแบบต่าง ๆ	31
2.3	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	40
2.4	การหาอนุพันธ์ของสมการอิงตัวแปรเสริม	43
2.5	อนุพันธ์อันดับสูง	47
2.6	บทสรุปท้ายบทที่ 2	50
2.7	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	50
3	การประยุกต์ของอนุพันธ์และผลต่างอนุพันธ์	56
3.1	ความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัส และเส้นแนวฉาก	56
3.2	อัตราสัมพัทธ์	61
3.3	การประยุกต์ของอนุพันธ์ในการเขียนกราฟของฟังก์ชัน	64
3.4	ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน	67
3.5	การประยุกต์ของผลต่างอนุพันธ์	73
3.6	บทสรุปท้ายบทที่ 3	77
3.7	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	77
4	ปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวและการประยุกต์	84
4.1	ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	84
4.2	ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	89
4.3	ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	92

4.4	ปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	95
4.5	ปริพันธ์จำกัดเขต	97
4.6	การประยุกต์ของปริพันธ์กับพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง	101
4.7	การประยุกต์ของปริพันธ์กับพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง	105
4.8	บทสรุปท้ายบทที่ 4	107
4.9	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4	108
5	เทคนิคของการหาปริพันธ์	114
5.1	การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าหรือเปลี่ยนตัวแปร	114
5.2	การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติรูปแบบแน่นอน	118
5.3	การหาปริพันธ์ทีละส่วน	140
5.4	บทสรุปท้ายบทที่ 5	144
5.5	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5	145
6	อนุพันธ์ย่อย	150
6.1	ฟังก์ชันหลายตัวแปร	150
6.2	พีชคณิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร	153
6.3	อนุพันธ์ย่อยและอนุพันธ์ย่อยอันดับสูง	154
6.4	กฎลูกโซ่	161
6.5	บทสรุปท้ายบทที่ 6	165
6.6	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6	165
7	สมการเชิงอนุพันธ์และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้านสิ่งแวดล้อม	170
7.1	สมการเชิงอนุพันธ์	170
7.2	สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง	176
7.3	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้านสิ่งแวดล้อม	188
7.4	บทสรุปท้ายบทที่ 7	202
7.5	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7	202
	เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท	208
	บรรณานุกรม	221
	ดัชนี	223

Mathematics for Environmental Science and Natural Resources

ผศ.ดร.วัลลภา วงศ์ศีลธรรม



บทที่ 1

สมบัติและความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

บทที่ 1

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ในทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ เรามักพบปัญหาที่ต้องคำนวณค่าด้วยการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงปริมาณของสิ่งหนึ่งซึ่งขึ้นกับปริมาณของอีกสิ่งหนึ่ง รวมถึงการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าหนึ่งอยู่เสมอ ซึ่งมักใช้วิธีการวิเคราะห์ค่าของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ ดังนั้นเพื่อให้สามารถวิเคราะห์ค่าของฟังก์ชันดังกล่าวได้อย่างถี่ถ้วนและชัดเจน นักคณิตศาสตร์จึงพัฒนาแนวคิดเกี่ยวกับลิมิตขึ้นมา อาจกล่าวได้ว่าหากปราศจากแนวคิดเรื่องลิมิตแล้ว วิชาแคลคูลัสคงไม่อาจเกิดขึ้นได้ ดังนั้นเนื้อหาที่จะได้ศึกษาในบทนี้จะประกอบด้วยบทนิยามของลิมิต ซึ่งจะแสดงให้เห็นว่าลิมิตนั้นคืออะไร พร้อมทั้งแสดงการเขียนลิมิต ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา ตลอดจนทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง กับลิมิต เพื่อจะได้หาค่าลิมิตได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง แนวคิดเกี่ยวกับลิมิตได้ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์หาปริมาณต่าง ๆ ทางเศรษฐศาสตร์และบริหารธุรกิจด้านสิ่งแวดล้อม ซึ่งจะขึ้นอยู่กับปัจจัยต่าง ๆ ที่เปลี่ยนแปลงไป เช่น ปริมาณขายสินค้าบรรจุภัณฑ์ที่ยั่งยืนเพื่อลดขยะหรือบริการที่หน่วยธุรกิจสามารถทำได้ เมื่อกำหนดค่าปัจจัยบางอย่าง ปริมาณการผลิตบรรจุภัณฑ์ที่ยั่งยืนเพื่อลดขยะที่ขึ้นกับวัตถุดิบหรือแรงงาน กำลังของเครื่องจักร ซึ่งจะนำไปสู่ขีดจำกัดสูงสุดหรือต่ำสุดที่หน่วยธุรกิจจะสามารถทำได้ เป็นต้น

1.1 นิยามและทฤษฎีบทของลิมิต

ถ้าเราเปลี่ยนค่าของ x ทำให้ค่าของ y เปลี่ยนไป ในเมื่อสองจำนวนมีค่าสัมพันธ์กันในลักษณะนี้ กล่าวคือ จำนวนหนึ่งเป็นฟังก์ชันของอีกจำนวนหนึ่ง และจำนวนทั้งสองนี้เรียกว่า "ตัวแปร (Variable)" ตัวแปรตัวหนึ่ง เรียกว่า ตัวแปรอิสระ (Independent variable) หรือตัวแปรอิสระบางตัวจะเรียกว่า ตัวแปรต้น และอีกตัวหนึ่งเรียกว่า ตัวแปรตาม (Dependent variable) ซึ่งตัวแปรต้นเป็นจำนวนที่สามารถกำหนดให้เป็นค่าใด ๆ ได้ ส่วนตัวแปรตามเป็นจำนวนที่มีค่าเกิดขึ้นจากการกำหนดตัวแปร

อิสระ นิยมใช้สัญลักษณ์แทนฟังก์ชันของ x ด้วย $f(x)$ ในการศึกษาสมการในรูปแบบของ $y = f(x)$ จะถือว่า x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรตาม ด้วยความสัมพันธ์ของ f นั้นเอง ฟังก์ชัน หมายถึง ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นและตัวแปรตาม ซึ่งหากพิจารณา $y = f(x)$ จะได้ว่า x เป็นตัวแปรต้น และ y เป็นตัวแปรตาม ถ้า $y = x^3 + 2x + 1$ จะเห็นได้ว่า เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 0^3 + 2(0) + 1 = 1$ และ เมื่อ $x = 1$ จะได้ $y = 1^3 + 2(1) + 1 = 4$ ในที่นี้ x และ y มีความสัมพันธ์กัน

1.1.1 ลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ในเรื่องฟังก์ชัน เรามีฟังก์ชันอยู่หลายรูปแบบ ที่ผ่านมาเราจะพิจารณาค่าของฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่ง ซึ่งในบางครั้งก็ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันที่บางจุดได้ แต่ในส่วนของหัวข้อลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียวนี้ เราจะพิจารณาถึงค่าที่เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งของฟังก์ชัน แต่ไม่ใช่ค่าของฟังก์ชัน รวมถึงการตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียวด้วย

ตัวอย่างที่ 1.1.1 พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

วิธีทำ เมื่อ $x = 1$ จะได้ $f(1) = \frac{2(1)+3}{1-2} = \frac{2+3}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ $f(2) = \frac{2(2)+3}{2-2} = \frac{4+3}{0} = \frac{7}{0}$

ดังนั้น ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันได้ ถ้า $x = 2$

จากตัวอย่างที่ 1.1.1 แสดงการหาค่าของฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่ง แต่ถ้าเราสนใจค่าของฟังก์ชันที่พารามิเตอร์ของฟังก์ชันนั้นมีค่าเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง จะเรียกว่า “ลิมิต (limit)” นั้นเอง ทั้งนี้ ถ้ากำหนดค่า x ใด ๆ แล้วสามารถหาค่า $f(x)$ หรือ y ได้เสมอ จะกล่าวได้ว่า $f(x)$ มีความต่อเนื่อง แต่ถ้ามีค่า x บางค่าที่ไม่สามารถหาค่า $f(x)$ ได้ ก็จะกล่าวได้ว่า $f(x)$ ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด x นั้น ซึ่งความต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง อาจมีทั้งภายในและภายนอกช่วงที่พิจารณา เมื่อฟังก์ชันมีความต่อเนื่อง การหาค่า $f(x)$ ที่จุด x ใด ๆ ก็หาได้ทันที เมื่อแทนค่า x ในฟังก์ชัน แต่ถ้าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง ค่า $f(x)$ ที่จุด x ดังกล่าว ก็เป็นเรื่องที่จะต้องเข้าใจและจัดการเมื่อนำไปใช้ประโยชน์ เช่น ในระหว่างที่คำนวณแล้วมีค่า x ดังกล่าวเกิดขึ้นเราควรจัดการอย่างไร เพื่อไม่ให้ผลการคำนวณนั้นผิดพลาด เช่น คัดกรองค่า x นั้นไม่นำไปคำนวณ หรือการกำหนดค่า $f(x)$ ที่จุด x นั้นไว้เลย ซึ่งการกำหนดค่าดังกล่าวอาจจะต้องนำค่ารอบข้างที่อยู่ใกล้ที่สุดเท่าที่หาได้มาประกอบการพิจารณา จึงเป็นที่มาของการหาลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อเข้าใกล้ค่า x ที่เราสนใจ

ตัวอย่างที่ 1.1.2 รถยนต์คันหนึ่งวิ่งจากเมือง ก. ไปเมือง ข. ซึ่งห่างกัน 50 กิโลเมตร ใช้เวลา 30 นาที ถ้าให้ S แทนระยะทางที่รถคันนี้วิ่งได้ หลังจากใช้เวลาผ่านไป t นาที จะเห็นว่า เมื่อเวลา t เข้าใกล้ 30 (แต่ยังไม่ถึง 30 นาที) นั้น ระยะทาง S ที่ได้จะเพิ่มขึ้นแล้ว มีค่าเข้าใกล้ 50 กิโลเมตร ค่า S ก็ยิ่งเข้าใกล้ 50 กิโลเมตร มากขึ้น

วิธีทำ ลักษณะเช่นนี้จะกล่าวว่า “ลิมิตของระยะทาง (S) ที่รถยนต์วิ่งได้ เมื่อเวลา t เข้าใกล้ 30 นาที

เท่ากับ 50 กิโลเมตร” สามารถเขียนแทนด้วย $\lim_{t \rightarrow 30} S = 50$

ตัวอย่างที่ 1.1.3 ในการผลิตสินค้าบรรจุภัณฑ์ที่ยั่งยืนเพื่อลดขยะชิ้นหนึ่ง ถ้าใช้ต้นทุนการผลิต X บาท แล้วได้กำไร P บาท โดยที่ $P = X - 50$ จะเห็นได้ว่า เมื่อต้นทุนการผลิต มีค่าเข้าใกล้ 100 บาท (แต่ยังไม่ถึง 100 บาท) จะทำกำไร มีค่าเข้าใกล้ 50

วิธีทำ ลักษณะเช่นนี้จะกล่าวว่า “ลิมิตของกำไร (P) เมื่อต้นทุนการผลิต (X) เข้าใกล้ 100 บาท เท่ากับ 50 บาท ”

สามารถเขียนแทนด้วย $\lim_{X \rightarrow 100} P = 50$ หรือ $\lim_{X \rightarrow 100} (X - 50) = 50$

ตารางที่ 1.1 แสดงค่าลิมิตของกำไร (P) เมื่อต้นทุนการผลิต (X) เข้าใกล้ 100 บาท เท่ากับ 50 บาท

X	80	90	95	99	101	105	110	120
$P = X - 50$	30	40	45	49	51	55	60	70
	---	---	---	--->	<---	---	---	---

จากตัวอย่างที่ 1.1.2 และ 1.1.3 สรุปได้ว่า ถ้าให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัว a (โดยที่ $x \neq a$) แล้วทำให้ $y = f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เพียงค่าเดียว เขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังต่อไปนี้ $\lim_{x \rightarrow a} y = L$ หรือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และนิยมเรียกย่อ ๆ ว่า “ลิมิตของฟังก์ชัน f ที่จุด a เท่ากับ L ” การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด a คือ จะพิจารณาเฉพาะค่าของ $f(x)$ ที่จุด a ซึ่งอยู่ใกล้ ๆ a (ทั้ง $x < a$ และ $x > a$)

ตัวอย่างที่ 1.1.4 กำหนดให้ฟังก์ชัน $y = f(x) = x + 1$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

วิธีทำ พิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 (ทั้ง $x < 1$ และ $x > 1$)

ตารางที่ 1.2 แสดงค่า $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1

x	0.5	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.5	2.5
$f(x) = x + 1$	1.5	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.5	3.5
	---	---	---	--->	<---	---	---	---

จะเห็นได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$

ตัวอย่างที่ 1.1.5 กำหนดให้ฟังก์ชัน $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

วิธีทำ พิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 (ทั้ง $x < 1$ และ $x > 1$)

ในที่นี้ $D_f = R - \{1\}$ จากโจทย์ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

ดังนั้น $f(x) = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{(x - 1)} = (x + 1)$ ทุก $x \in D_f$

ตารางที่ 1.3 แสดงค่า $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1

x	0.5	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.5	2.5
$f(x) = x + 1$	1.5	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.5	3.5
	---	---	---	--->	<---	---	---	---

จะเห็นได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

จากตัวอย่างที่ 1.1.4 และ 1.1.5 จะเห็นได้ว่าค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด $x = a$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับค่าของฟังก์ชันที่ $x = a$ ดังนั้นจะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

กรณีที่ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่มีลิมิตที่ $x = a$ จะมี 2 รูปแบบ ดังต่อไปนี้ กรณีที่ 1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ มีค่าไม่เข้าใกล้ค่าคงตัวใดเลย และ กรณีที่ 2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวมากกว่า 1 ค่า

ตัวอย่างที่ 1.1.6 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
วิธีทำ ในที่นี้ $D_f = R - \{0\}$ เพราะว่า $f(0) = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

ตารางที่ 1.4 แสดงค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1	1
$f(x) = \frac{1}{x}$	-1	-10	-100	-1000	1000	100	10	1
	---	---	---	--->	<---	---	---	---

จะเห็นได้ว่า กรณีที่ $x < 0$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 0 แล้ว $f(x) = \frac{1}{x}$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขต

และ กรณีที่ $x > 0$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 0 แล้ว $f(x) = \frac{1}{x}$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต

จึงสรุปได้ว่า x มีค่าเข้าใกล้ 0 แล้ว $f(x)$ มีค่าไม่เข้าใกล้ค่าคงตัวใด ๆ เลย

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ไม่มีลิมิต หรือ ลิมิตหาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1.1.7 กำหนดให้ฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

วิธีทำ ในที่นี้ $D_f = R$ โดยที่ $f(0) = 0$ และที่ $x \neq 0$ จะได้

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ($x \neq 0$) แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่สองค่า คือ 1 และ -1
 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ไม่มีลิมิต หรือ ลิมิตหาค่าไม่ได้

บทนิยาม 1.1.1

กำหนด f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ x นิยามบนช่วงเปิดรอบจุด a จะกล่าวว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ k เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ถ้าสำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - k| < \epsilon$ ทั้งนี้จะเขียนด้วย $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

ตัวอย่างที่ 1.1.8 จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 5 = 7$

วิธีทำ กำหนดให้ $\epsilon > 0$ และเลือก $\delta = \frac{\epsilon}{3}$

$$\text{ให้ } 0 < |x - 4| < \delta \text{ ดังนั้น } |x - 4| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\text{หรือ } 3|x - 4| < \epsilon$$

$$|3x - 12| < \epsilon$$

$$|(3x - 5) - 7| < \epsilon$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 4} 3x - 5 = 7$$

ตัวอย่างที่ 1.1.9 จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

วิธีทำ กำหนดให้ $\epsilon > 0$ และเลือก $\delta = \epsilon$

$$\text{ให้ } 0 < |x - 2| < \delta \text{ ดังนั้น } |x - 2| < \epsilon$$

$$\text{หรือ } |(x + 2) - 4| < \epsilon$$

$$\left| \frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{(x - 2)} - 4 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{x^2 - 4}{(x - 2)} - 4 \right| < \epsilon$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

หมายเหตุ : จากตัวอย่างที่ 1.1.8 - 1.1.9 เป็นการแสดงให้เห็นถึงว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$ โดยใช้บทนิยามในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งโดยทั่วไปมักใช้ในกรณีที่เป็นทางการ (Formal) เท่านั้น หรือจะใช้เป็นวิธีในการตรวจคำตอบว่าเราหาคำตอบของลิมิตได้ถูกต้อง

ทฤษฎีบท 1.1.1

ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีลิมิตที่จุด $x = a$ แล้วจะได้ว่าลิมิตของ $f(x)$ มีเพียงค่าเดียว (นั่นคือ ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ แล้ว $L = M$)

ทฤษฎีบท 1.1.2

ถ้าฟังก์ชัน $f(x) = c$ โดยที่ $c \in R$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

ตัวอย่างเช่น

- 1.) $\lim_{x \rightarrow a} 5 = 5$
- 2.) $\lim_{x \rightarrow -9} -7 = -7$

ทฤษฎีบท 1.1.3

ถ้าฟังก์ชัน $f(x) = x$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

ตัวอย่างเช่น

- 1.) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{45}} x = \sqrt{45}$
- 2.) $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

ทฤษฎีบท 1.1.4

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า L, M และ a เป็นจำนวนจริง แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ดังนั้น

- 1.) $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$
- 2.) $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$
- 3.) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}; \quad M \neq 0$

บทแทรก 1.1.1

กำหนดให้ฟังก์ชัน f, f_i , เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันที่มีลิมิตที่จุด $x = a$ และ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i$, เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ ดังนี้

- 1.) $\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot L$
- 2.) $\lim_{x \rightarrow a} f^k(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^k = L^k$
- 3.) $\lim_{x \rightarrow a} (f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_n)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \pm \dots \pm \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n$
- 4.) $\lim_{x \rightarrow a} (f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_n$
- 5.) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$
- 6.) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)| = |L|$

บทแทรก 1.1.2

กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะได้ว่า สำหรับทุก $a \in R$

- 1.) $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$
- 2.) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, Q(a) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 1.1.10 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow a} x^3 + x - 3$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} x^3 + x - 3 &= \lim_{x \rightarrow a} x^3 + \lim_{x \rightarrow a} x - \lim_{x \rightarrow a} 3 \\ &= a^3 + a - 3 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.1.11 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 7}{2x^2 + x + 3}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 7}{2x^2 + x + 3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} (x^2 - 7)}{\lim_{x \rightarrow a} (2x^2 + x + 3)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^2 - \lim_{x \rightarrow a} 7}{\lim_{x \rightarrow a} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} 3} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^2 - \lim_{x \rightarrow a} 7}{2 \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} 3} \\ &= \frac{a^2 - 7}{2a^2 + a + 3} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.1.12 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1} \\
&= \frac{2(2)^2 + 2 - 1}{2 - 1} \\
&= \frac{8 + 2 - 1}{1} \\
&= 9
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.1.13 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

วิธีทำ แทนค่า $x = 3$ ลงในฟังก์ชันจากโจทย์ จะได้ว่า $\frac{3^2 - 2(3) - 3}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ อยู่ในรูปแบบที่เรียกว่า "รูปแบบยังไม่กำหนด" นั่นคือถ้าลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ต้องจัดรูปใหม่โดยใช้หลักพีชคณิต

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3) \cdot (x + 1)}{(x - 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 1 \\
&= 3 + 1 \\
&= 4
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.1.14 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

วิธีทำ แทนค่า $x = 0$ ลงในฟังก์ชันจากโจทย์ จะได้ว่า $\frac{\sqrt{0+4} - 2}{0} = \frac{0}{0}$ อยู่ในรูปแบบที่เรียกว่า "รูปแบบยังไม่กำหนด" นั่นคือถ้าลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ จะทำได้โดยการคูณด้วยสังยุค (Conjugate) มาคูณทั้งเศษและส่วน

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2}{x \cdot (\sqrt{x+4} + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{x \cdot (\sqrt{x+4} + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot (\sqrt{x+4} + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4} + 2)} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+4} + \lim_{x \rightarrow 0} 2} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x+4)} + \lim_{x \rightarrow 0} 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 4 + \lim_{x \rightarrow 0} 2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0 + 4 + 2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4 + 2}} \\
&= \frac{1}{2 + 2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

หมายเหตุ : สรุปรูปแบบยังไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$ จะใช้วิธีต่าง ๆ ดังนี้

- [1] ใช้หลักพีชคณิต (การแยกตัวประกอบ การดึงตัวร่วม และการตัดทอนฟังก์ชัน)
- [2] การนำสังยุค Conjugate มาคูณทั้งเศษและส่วน

บทนิยาม 1.1.2

กำหนดให้ $f(x)$ นิยามบนช่วงเปิด (b, a) โดยที่ $b < a$ และถ้า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ K เมื่อ x เข้าใกล้ a ในช่วง (b, a) แล้วจะกล่าวได้ว่า f มีลิมิตซ้ายที่ a เท่ากับ K และจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = K$$

บทนิยาม 1.1.3

กำหนดให้ $f(x)$ นิยามบนช่วงเปิด (a, c) โดยที่ $c > a$ และถ้า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ในช่วง (a, c) แล้วจะกล่าวได้ว่า f มีลิมิตขวาที่ a เท่ากับ L และจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

ตัวอย่างที่ 1.1.15 จงหาลิมิตต่อไปนี้ $\lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 3 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 \\
&= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2^-} x - \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 \\
&= 2 \cdot (2) - 3 = 1
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.1.16 จงหาลิมิตต่อไปนี้ $\lim_{x \rightarrow 2^+} 5x + 2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2^+} 5x + 2 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 5x + \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 \\
&= 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} x + \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 \\
&= 5 \cdot (2) + 2 \\
&= 10 + 2 = 12
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.1.17 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ $\lim_{x \rightarrow 20^+} \sqrt{x-4}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 20^+} \sqrt{x-4} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 20^+} (x-4)} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 20^+} x - \lim_{x \rightarrow 20^+} 4} \\ &= \sqrt{20-4} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4\end{aligned}$$

1.1.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- 1.) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$
- 2.) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$
- 3.) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ โดยที่ มุมของ θ มีหน่วยเป็นเรเดียน

ตัวอย่างที่ 1.1.18 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} &= \frac{2}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \\ &= 2 \cdot (1) \\ &= 2\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.1.5

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = K \text{ และ } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = K \quad [\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$$

ตัวอย่างที่ 1.1.19 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ $\lim_{x \rightarrow 4} 2x - 3$ (โดยใช้ทฤษฎีบท 1.1.5)

วิธีทำ
$$\begin{aligned}*\lim_{x \rightarrow 4^-} 2x - 3 &= \lim_{x \rightarrow 4^-} 2x - \lim_{x \rightarrow 4^-} 3 \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 4^-} x - \lim_{x \rightarrow 4^-} 3 \\ &= 2 \cdot (4) - 3 \\ &= 8 - 3 \\ &= 5 \\ * \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x - 3 &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x - \lim_{x \rightarrow 4^+} 3 \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 4^+} x - \lim_{x \rightarrow 4^+} 3 \\ &= 2 \cdot (4) - 3 \\ &= 8 - 3 \\ &= 5\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 4^-} 2x - 3 = 5 = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x - 3$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 4} 2x - 3 = 5$

ตัวอย่างที่ 1.1.20 จงหาลิมิตต่อไปนี้ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ (โดยใช้ทฤษฎีบท 1.1.5)

วิธีทำ * $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{(x-3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3^-} -1 = -1$

* $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)}{(x-3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3}$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1.1.21 จงหาลิมิตต่อไปนี้ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (โดยใช้ทฤษฎีบท 1.1.5)

โดยที่ $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & ; x \leq 3 \\ x+1 & ; x > 3 \end{cases}$

วิธีทำ * $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x-2) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x - \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3^-} x - \lim_{x \rightarrow 3^-} 2$
 $= 2 \cdot (3) - 2 = 6 - 2 = 4$

* $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x + 1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} x + \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 3 + 1 = 4$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$

1.2 ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

"อนันต์ (Infinity)" แทนด้วยสัญลักษณ์ (∞) ไม่ใช่จำนวนจริง แต่ใช้แทนจำนวนที่มีค่ามากกว่าทุกจำนวนจริง กล่าวคือ สำหรับทุก ๆ $r \in R$ นั่นคือ $|r| < \infty$ และในทางตรงกันข้าม "ลบอนันต์" แทนด้วยสัญลักษณ์ $(-\infty)$ ก็จะใช้แทนจำนวนที่น้อยกว่าทุก ๆ จำนวนจริง กล่าวคือ ทุก ๆ $r \in R$ นั่นคือ $-\infty < r$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์เป็นการหาลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อตัวแปรอิสระ x มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างใดอย่างหนึ่งแบบไม่มีขอบเขต กล่าวคือ ค่าของ $f(x)$ อาจมีค่าเข้าใกล้ค่าหนึ่งใด ๆ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตทางด้านบวก (เขียนแทนด้วย $x \rightarrow \infty$) หรือเมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขตทางด้านลบ (เขียนแทนด้วย $x \rightarrow -\infty$)