



Calculus 3

FOR ENGINEERS



ตัวอย่างเฉลย

แคลคูลัส 3

สำหรับ

วิศวกร

สำหรับนักศึกษาในระดับ ปวส. และระดับปริญญาตรี

- สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น
- อินทิกรัลไม่ตรงแบบ
- อินทิกรัลเชิงตัวเลข
- อินทิกรัลตามเส้น
- อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
- อนุกรมอนันต์



รศ. ดร.ธีระศักดิ์ อูรกิจนันท์

คำนำ

ตำราแคลคูลัส 3 สำหรับวิศวกร (Calculus 3 for Engineers) เล่มนี้ ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงขึ้น เพื่อให้ให้นักศึกษาได้มีตำราที่ใช้ในการประกอบการเรียนการสอนนักศึกษาในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ.) หลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต (อศ.บ.) และหลักสูตรครุศาสตรอุตสาหกรรมบัณฑิต (ค.อ.บ.) ระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อีกทั้งตำราเล่มนี้นักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอื่น ๆ และสถาบันการอาชีวศึกษาทั่วประเทศ สามารถศึกษาเนื้อหาที่มีความสนใจเพื่อใช้ในการประกอบการเรียนการสอนเพิ่มเติมได้ โดยมีเนื้อหาดังนี้

1. สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น
2. อินทิกรัลไม่ตรงแบบ
3. อินทิกรัลเชิงตัวเลข
4. อินทิกรัลตามเส้น
5. อนุพันธ์เชิงคณิตศาสตร์
6. อนุกรมอนันต์

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราแคลคูลัส 3 สำหรับวิศวกร เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอนของนักศึกษาและผู้ที่ต้องการใช้ประกอบการศึกษาเพิ่มเติม

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดา ที่มีพระคุณอันยิ่งใหญ่หาศาลหาสิ่งอื่นใดเสมอมิได้ และผู้เขียนขอโอกาสนี้แสดงคารวะและกตัญญูแก่ผู้ที่ต่อคุณครู และอาจารย์ทุก ๆ ท่านของผู้เขียน รวมทั้งผู้ช่วยศาสตราจารย์เมธี ลิ้มอักษร ผู้ช่วยศาสตราจารย์เสกสรรค์ คำกระบี่ รองศาสตราจารย์ ดร. สมใจ จิตต์พิทักษ์ รองศาสตราจารย์ ดร. วิชัย ชำนิ รองศาสตราจารย์สมศักดิ์ โพธิ์วิจิตร รองศาสตราจารย์ สุพจน์ ชะนะมา รองศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ ทองอยู่ ศาสตราจารย์ ดร. สมหวัง พิธิยานุวัฒน์ ศาสตราจารย์ ดร. อุทุมพร จามรมาน อาจารย์ ดร.อัญชลี ตนานนท์ รองศาสตราจารย์ ดร. กิตติพร ปัญญาภิญโญผล ที่เป็นบุคลากรอาจารย์ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้และประสบการณ์ต่าง ๆ ให้แก่ผู้เขียน รวมถึงเพื่อนร่วมงานทุกคน และท้ายสุดครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่งที่สุดของผู้เขียนตลอดมา

รองศาสตราจารย์ ดร. ชีระศักดิ์ อุรจนาพันธ์

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1	
สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น	1
บทนำ	1
สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้	5
แบบฝึกหัด 1.1	11
คำตอบแบบฝึกหัด 1.1	12
สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์	13
แบบฝึกหัด 1.2	25
คำตอบแบบฝึกหัด 1.2	26
สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง	27
แบบฝึกหัด 1.3	41
คำตอบแบบฝึกหัด 1.3	42
ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต	43
แบบฝึกหัด 1.4	57
คำตอบแบบฝึกหัด 1.4	58
สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง	59
แบบฝึกหัด 1.5	67
คำตอบแบบฝึกหัด 1.5	68
สมการแบร์นูลลี	69
แบบฝึกหัด 1.6	81
คำตอบแบบฝึกหัด 1.6	82
บทที่ 2	
อินทิกรัลไม่ตรงแบบ	83
บทนำ	83
อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง	84
แบบฝึกหัด 2.1	102
คำตอบแบบฝึกหัด 2.1	103

	หน้า
	อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่สอง
	104
	แบบฝึกหัด 2.2
	119
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.2
	120
	อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดผสม
	121
	แบบฝึกหัด 2.3
	127
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.3
	128
บทที่ 3	อินทิกรัลเชิงตัวเลข
	129
	กฎจุดปลายทางซ้าย
	130
	กฎจุดปลายทางขวา
	131
	กฎสี่เหลี่ยมคางหมู
	134
	แบบฝึกหัด 3.1
	156
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.1
	158
	กฎซิมป์สัน
	159
	แบบฝึกหัด 3.2
	188
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.2
	190
บทที่ 4	อินทิกรัลตามเส้น
	191
	อินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง
	191
	แบบฝึกหัด 4.1
	215
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.1
	216
	อินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
	217
	แบบฝึกหัด 4.2
	235
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.2
	236
บทที่ 5	อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
	237
	หลักการจัดอันดับดี
	237
	การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
	239
	แบบฝึกหัด 5
	252

	หน้า
บทที่ 6	
อนุกรมอนันต์	253
ลำดับ	253
แบบฝึกหัด 6.1	272
คำตอบแบบฝึกหัด 6.1	274
ลำดับทางเดียว	276
แบบฝึกหัด 6.2	287
คำตอบแบบฝึกหัด 6.2	288
อนุกรมอนันต์	289
แบบฝึกหัด 6.3	313
คำตอบแบบฝึกหัด 6.3	316
การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม	317
แบบฝึกหัด 6.4	332
คำตอบแบบฝึกหัด 6.4	334
การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ	335
แบบฝึกหัด 6.5	340
การทดสอบโดยอัตราส่วน	341
แบบฝึกหัด 6.6	353
คำตอบแบบฝึกหัด 6.6	354
การทดสอบโดยการถอดราก	355
แบบฝึกหัด 6.7	361
คำตอบแบบฝึกหัด 6.7	362
การทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต	363
แบบฝึกหัด 6.8	369
คำตอบแบบฝึกหัด 6.8	370
สรุปการทดสอบการลู่เข้า	371
แบบฝึกหัด 6.9	385
คำตอบแบบฝึกหัด 6.9	386

	หน้า
อนุกรมสลับ	387
แบบฝึกหัด 6.10	402
คำตอบแบบฝึกหัด 6.10	404
อนุกรมกำลังใน x	405
แบบฝึกหัด 6.11	423
คำตอบแบบฝึกหัด 6.11	424
อนุกรมกำลังใน $x - a$	425
แบบฝึกหัด 6.12	441
คำตอบแบบฝึกหัด 6.12	442
อนุกรมของแมคลอรินและเทย์เลอร์	443
แบบฝึกหัด 6.13	463
คำตอบแบบฝึกหัด 6.13	464
อนุกรมฟูรีเยร์	465
แบบฝึกหัด 6.14	512
คำตอบแบบฝึกหัด 6.14	516
ภาคผนวก	520
พีชคณิตพื้นฐาน	520
สมบัติของเลขชี้กำลังและลอการิทึม	520
ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	521
เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ	522
สรุปพื้นฐานลำดับและอนุกรม	524
สูตรการหาอนุพันธ์	529
สูตรการอินทิเกรต	530
บรรณานุกรม	531

บทที่ 1

สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

บทนำ

สมการคณิตศาสตร์ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์เป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และในสาขาอื่น ๆ เนื่องจากกฎเกณฑ์และปัญหาต่าง ๆ ในสาขาเหล่านี้ล้วนพิจารณาเป็นสมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสิ้นหรือสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ ตัวอย่างเช่น

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ กำหนดความชันที่จุดใด ๆ เป็น $\frac{dy}{dx}$ และจุดผ่าน (x_0, y_0)
จงหาสมการเส้นโค้ง

ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผูกติดกับปลายลวดสปริงจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$

ปัญหาการเคลื่อนที่ กำหนดความเร็วในการเคลื่อนที่ $v(t)$ และจุดเริ่มต้นของการเคลื่อนที่ จะมีรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์เป็น $\frac{ds}{dt} = v(t)$ เมื่อ s เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่ ณ เวลา t

สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations)

สมการเชิงอนุพันธ์หมายถึง สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวหรือมากกว่า ตัวอย่างเช่น

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 10y = 0, \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial t} = v, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation) หมายถึง สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น

$$\text{ตัวอย่างเช่น } \frac{dy}{dx} = 2x + 5, \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0, \frac{d^3y}{dx^3} + 2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + \frac{dy}{dx} = \cos x$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) หมายถึง สมการที่ประกอบด้วย อนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไปตัวอย่างเช่น

$$\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial t} = v, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ (Order of differential equations) คือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ ที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

ตัวอย่างเช่น $\frac{dy}{dx} + 3x = 2y$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1

$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2

$(y''')^2 + (y'')^4 + 3y = x^2$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3

ระดับชั้นของสมการเชิงอนุพันธ์ (Degree of differential equations) คือ เลขชี้กำลังของพจน์ อนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น หลังจากทำให้อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้นมีกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างเช่น $x \frac{dy}{dx} + y = 3$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ระดับชั้น 1

$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับชั้น 1

$x \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 + 4y = xy$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 ระดับชั้น 2

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^4}$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^4$

จึงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับชั้น 2

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear differential equations) เป็นสมการที่มีเงื่อนไขดังนี้

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระมีเลขชี้กำลังเท่ากับ 1 เท่านั้น
2. ไม่มีพจน์ที่อยู่ในรูปผลคูณของตัวแปรตามและ/หรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear differential equations) หมายถึงสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ตัวอย่างเช่น

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = xy \quad \text{เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} = x^2 \quad \text{เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น}$$

รูปทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเขียนได้เป็น

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

โดยที่ $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (Solution of differential equations) คือ ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตามที่ไม่ปรากฏพจน์ของอนุพันธ์ ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าแล้วทำให้สมการเชิงอนุพันธ์นั้นเป็นจริงหรือสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างเช่น $y = \sin x + 3 \cos x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

$y = e^{2x} + e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

$y^3 + 2xy - x^2 = 0$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y}{3y^2 + 2x}$

$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

ผลเฉลยทั่วไป (General solutions) หมายถึง ผลเฉลยที่ประกอบด้วยค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constant) จำนวน n ค่า นิยมเขียนในรูปของตัวอักษร c

ตัวอย่างเช่น $y = x^3 + c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ไม่เจาะจง

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่ไม่เจาะจง

ผลเฉลยเฉพาะราย (Particular solutions) หมายถึง ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ค่าคงที่ไม่เจาะจงจำนวน n ค่า นั้น ได้ถูกแทนค่าเป็นค่าคงที่แน่นอนทั้ง n ค่า ภายใต้เงื่อนไขของโจทย์ที่กำหนดให้

ตัวอย่างเช่น $y = x^3 + 1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะรายของสมการ $\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$ ภายใต้เงื่อนไข $x = 1$ และ $y = 2$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและระดับชั้นหนึ่ง

วิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและระดับชั้นหนึ่งนั้น จะขึ้นอยู่กับรูปแบบต่าง ๆ ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น เช่น สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและระดับชั้นหนึ่ง หมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนอยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ โดยที่ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y หรืออาจเขียนอยู่ในรูป $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ โดยที่ $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y

ตัวอย่างเช่น สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$ สามารถเขียนได้ในรูป $(y+x)dx - (y-x)dy = 0$ จะได้ว่า $M(x, y) = y+x$ และ $N(x, y) = -(y-x)$

สมการ $\frac{dy}{dx} = 1+x^2y$ สามารถเขียนได้ในรูป $(1+x^2y)dx - dy = 0$ จะได้ว่า $M(x, y) = 1+x^2y$ และ $N(x, y) = -1$

1.1 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ (Variable separable differential equations)

นิยาม 1.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จะเรียกว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ ก็ต่อเมื่อจัดให้อยู่ในรูปของ

$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

โดยที่ $A(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว และ $B(y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียว

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรทำได้ดังนี้

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ถ้าสามารถแยกตัวแปรที่เหมือนกันให้อยู่ด้วยกัน โดยการแยก $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นผลคูณของฟังก์ชันตัวแปรเดียว 2 ฟังก์ชันคูณกันได้ดังนี้

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

แล้วหารตลอดด้วย $M_2(y)N_1(x)$

ได้
$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

กำหนดให้ $\frac{M_1(x)}{N_1(x)} = A(x)$ และ $\frac{N_2(y)}{M_2(y)} = B(y)$

ได้
$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

แล้วทำการอินทิเกรตตลอดสมการก็จะได้ผลเฉลยทั่วไปที่ต้องการ

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c \quad \text{โดย } c \text{ เป็นค่าคงที่ไม่ใช่จะจง}$$

ตัวอย่าง 1.1.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2y \frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

โดยการคูณตลอดด้วย dx ได้ $x^2ydy + 2xy^2dx = 0$

โดยการหารตลอดด้วย x^2y^2 ได้ $\frac{ydy}{y^2} + \frac{2xdx}{x^2} = 0$

$$\frac{1}{y}dy + \frac{2}{x}dx = 0$$

$$\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{2}{x}dx = c$$

$$\ln|y| + 2\ln|x| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\ln|y| + 2\ln|x| = c$ ■

หมายเหตุ จากผลเฉลยทั่วไปคือ $\ln|y| + 2\ln|x| = c$ อาจจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\ln|y| + \ln|x^2| = \ln|c_1| \quad \text{เมื่อ } \ln|c_1| = c \text{ โดย } c \text{ เป็นค่าคงที่ไม่ใช่จะจง}$$

$$\ln|x^2y| = \ln|c_1|$$

$$x^2y = c_1$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2y = c_1$ ■

ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2}{x-2}$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

โดยการคูณตลอดด้วย $(x-2)dx$ ได้ $(x-2)dy = xy^2dx$

$$(x-2)dy - xy^2dx = 0$$

โดยการหารตลอดด้วย $(x-2)y^2$ ได้ $\frac{1}{y^2}dy - \frac{x}{x-2}dx = 0$

$$\int \frac{1}{y^2}dy - \int \frac{x}{x-2}dx = c$$

พิจารณา $\int \frac{x}{x-2}dx$ เนื่องจากกำลังสูงสุดของเศษเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วน

จึงนำ $x-2$ ไปหาร x ได้ดังนี้

$$(x-2) \overline{) x} \quad (1$$

$$\underline{x-2}$$

$$=$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2} \text{ และจะได้}$$

$$\int y^{-2}dy - \int \left(1 + \frac{2}{x-2}\right)dx = c$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} - \int dx - \int \frac{2}{x-2}dx = c$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} - \int dx - 2 \int \frac{d(x-2)}{x-2} = c$$

$$-\frac{1}{y} - x - 2\ln|x-2| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $-\frac{1}{y} - x - 2\ln|x-2| = c$ ■

ตัวอย่าง 1.1.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(x-4)y^4 dx - x^3(y^2-3)dy = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \text{โดยการคูณตลอดด้วย } x^3 y^4 \text{ ได้ } & \frac{x-4}{x^3} dx - \frac{y^2-3}{y^4} dy = 0 \\ \int \frac{x-4}{x^3} dx - \int \frac{y^2-3}{y^4} dy = c & \\ \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx - \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4} \right) dy = c & \\ \int (x^{-2} - 4x^{-3}) dx - \int (y^{-2} - 3y^{-4}) dy = c & \\ \left(\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{4x^{-2}}{-2} \right) - \left(\frac{y^{-1}}{-1} - \frac{3y^{-3}}{-3} \right) = c & \\ \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) - \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} \right) = c & \\ \frac{2}{x^2} - \frac{1}{y^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c & \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{y^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c$ ■

ตัวอย่าง 1.1.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+xy^2}{y+x^2y}$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \text{โดยการคูณตลอดด้วย } (y+x^2y) dx \text{ ได้ } & (y+x^2y) dy = (3x+xy^2) dx \\ (y+x^2y) dy - (3x+xy^2) dx & = 0 \\ y(1+x^2) dy - x(3+y^2) dx & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โดยการหารตลอดด้วย } (1+x^2)(3+y^2) \text{ ได้ } & \frac{y}{3+y^2} dy - \frac{x}{1+x^2} dx = 0 \\ \int \frac{y}{3+y^2} dy - \int \frac{x}{1+x^2} dx = c & \\ \int \frac{yd(3+y^2)}{(3+y^2)(2y)} - \int \frac{xd(1+x^2)}{(1+x^2)(2x)} = c & \\ \frac{1}{2} \int \frac{d(3+y^2)}{3+y^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = c & \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \ln|3+y^2| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{1}{2} \ln|3+y^2| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| = c$ ■

หมายเหตุ จากผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{1}{2} \ln|3+y^2| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| = c$ อาจจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\ln|3+y^2| - \ln|1+x^2| = 2c$$

$$\ln|3+y^2| - \ln|1+x^2| = \ln|c_1| \quad \text{เมื่อ } 2c = \ln|c_1|$$

$$\ln \left| \frac{3+y^2}{1+x^2} \right| = \ln|c_1|$$

$$\frac{3+y^2}{1+x^2} = c_1$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{3+y^2}{1+x^2} = c_1$ ■

ตัวอย่าง 1.1.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1+y^2)dx - (1+x^2)xydy = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

โดยการหารตลอดด้วย $x(1+x^2)(1+y^2)$ ได้ $\frac{1}{x(1+x^2)}dx - \frac{y}{1+y^2}dy = 0$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx - \int \frac{y}{1+y^2}dy = c$$

โดยการแยกเศษส่วนย่อยของ $\frac{1}{x(1+x^2)}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(1+x^2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x^2} \\ &= \frac{A(1+x^2) + Bx}{x(1+x^2)} \end{aligned}$$

$$1 = A(1+x^2) + Bx \dots\dots\dots(1)$$

ให้ $x=0$ ใน (1) จะได้

$$1 = A(1+0) + B(0)$$

$$A = 1$$

แทน $A=1$ และ $x=1$ ใน (1) จะได้ $1 = 1(1+1^2) + B(1)$

$$1 = 2 + B$$

$$B = -1$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}$$

นั่นคือ

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx - \int \frac{y}{1+y^2} dy = c$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx - \int \frac{y}{1+y^2} dy = c$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = c$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| - \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| - \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = c$ ■

ตัวอย่าง 1.1.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปและผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x \sin y dx + (x^2 + 1) \cos y dy = 0 \quad \text{และ} \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

โดยการหารตลอดด้วย $(x^2 + 1) \sin y$ ได้ $\frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{\cos y}{\sin y} dy = 0$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = c$$

$$\int \frac{xd(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(2x)} + \int \frac{\cos y d(\sin y)}{(\sin y)(\cos y)} = c$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \int \frac{d(\sin y)}{\sin y} = c$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \ln|\sin y| = c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \ln|\sin y| = c$ ■

เนื่องจาก $y(0) = \frac{\pi}{2}$ หรือ $x=0, y=\frac{\pi}{2}$ แทนค่าในผลเฉลยทั่วไป จะได้

$$\frac{1}{2} \ln|(0)^2 + 1| + \ln\left|\sin \frac{\pi}{2}\right| = c$$

$$\frac{1}{2} \ln 1 + \ln 1 = c$$

$$c = 0 \quad (\text{โดยที่ } \ln 1 = 0)$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะรายคือ $\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \ln|\sin y| = 0$ ■

ตัวอย่าง 1.1.7 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์ $x dx + ye^{-x} dy = 0$ และ $y(0) = 1$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

โดยการหารตลอดด้วย e^{-x} ได้ $\frac{x}{e^{-x}} dx + y dy = 0$

$$xe^x dx + y dy = 0$$

$$\int xe^x dx + \int y dy = c$$

$\int xe^x dx$ ใช้การอินทิเกรตแยกทีละส่วน (by part) ดังนี้

u	dv
+ x	e^x
- 1	e^x
+ 0	e^x

ดังนั้น $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$

นั่นคือ $xe^x - e^x + \frac{y^2}{2} = c$

เนื่องจาก $y(0) = 1$ ดังนั้น $(0)(e^0) - e^0 + \frac{1}{2} = c$

$$0 - 1 + \frac{1}{2} = c$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะรายคือ $xe^x - e^x + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}$ ■

แบบฝึกหัด 1.1

จากข้อ 1 - 7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1. \quad 4xydx + (x^2 + 1)dy = 0$$

$$2. \quad (xy + x)dx - (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy = 0$$

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x^3y + y}$$

$$4. \quad e^{y^2}dx + x^2ydy = 0$$

$$5. \quad (x - 4)y^4dx - x^3(y^2 - 3)dy = 0$$

$$6. \quad y \ln x \ln y dx + dy = 0$$

$$7. \quad \frac{dy}{dx} = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$$

จากข้อ 8 - 10 จงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$8. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y(1 + x^2)} \quad \text{เมื่อ } y(0) = 2$$

$$9. \quad \frac{dy}{dx} = xy^3(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{เมื่อ } y(0) = 1$$

$$10. \quad \sin^2 y dx + \cos^2 x dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.1

1. $2 \ln|x^2 + 1| + \ln|y| = c$

2. $\ln|x^2 + 1| = y^2 - 2y + 4 \ln|y + 1| + c$

3. $\frac{y^2}{2} = \frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + c$

4. $\frac{1}{x} - \frac{1}{2e^{y^2}} + c = 0$

5. $-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} = c$

6. $x \ln x + \ln|\ln y| = x + c$

7. $\frac{1}{2} \tan 2y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c$

8. $\frac{1}{2} y^2 = \ln|1 + x^2| + 2$

9. $-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1 + x^2} - \frac{3}{2}$

10. $\tan x \tan y = 1$

1.2 สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ (Homogeneous differential equations)

นิยาม 1.2.1 ฟังก์ชัน $f(x, y)$ จะเรียกว่าฟังก์ชันเอกพันธ์ (Homogeneous function) ระดับชั้น k ใน x และ y ที่ทำให้ $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ ทุกจำนวนจริง $t \neq 0$

จากนิยาม 1.2.1 แสดงว่าในการทดสอบฟังก์ชัน $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น k ใน x และ y หรือไม่นั้น ให้แทนค่า x และ y ในฟังก์ชัน $f(x, y)$ ด้วย tx และ ty ตามลำดับ ถ้า $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ แล้วเราจะสรุปว่า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น k ใน x และ y

ตัวอย่าง 1.2.1 จงแสดงว่า $f(x, y) = x^2y + y^3$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 3

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{เพราะว่า } f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) + (ty)^3 \\ &= t^3x^2y + t^3y^3 \\ &= t^3(x^2y + y^3) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x, y) = x^2y + y^3$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 3 ■

ตัวอย่าง 1.2.2 จงแสดงว่า $f(x, y) = xy - y + 2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{เพราะว่า } f(tx, ty) &= (tx)(ty) - ty + 2 \\ &= t^2xy - ty + 2 \\ &\neq t^2(xy - y + 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x, y) = xy - y + 2$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ■

บทนิยาม 1.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับหนึ่ง $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จะเรียกว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้นเท่ากัน

ตัวอย่างเช่น $(x - 2y)dx + (2x + y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ เนื่องจาก $M(x, y) = x - 2y$ และ $N(x, y) = 2x + y$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 1

$(x^2 - 3y^2)dx + 4xydy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ เนื่องจาก $M(x, y) = x^2 - 3y^2$ และ $N(x, y) = 4xy$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้น 2

$(y + xy)dx + xdy = 0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์เนื่องจาก $M(x, y) = y + xy$ และ $N(x, y) = x$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ระดับชั้นเท่ากัน