



Calculus 1

FOR ENGINEERS



แคลคูลัส 1

สำหรับ

วิศวกร



สแกน QR Code

ตัวอย่างเฉลย

สำหรับนักศึกษาในระดับ ปวส. และระดับปริญญาตรี

- ลิขิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- การประยุกต์ของอนุพันธ์
- การอินทิเกรต
- เทคนิคการอินทิเกรต
- อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์

คำนำ

ตำราแคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร (Calculus 1 for Engineers) เล่มนี้ ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงขึ้น เพื่อให้ให้นักศึกษาได้มีตำราที่ใช้ในการประกอบการเรียนการสอนนักศึกษาในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ.) หลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต (อศ.บ.) และหลักสูตรครุศาสตรอุตสาหกรรมบัณฑิต (ค.อ.บ.) ระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี นอกจากนี้ตำราเล่มนี้นักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอื่น ๆ และสถาบันอาชีวศึกษาทั่วประเทศ สามารถศึกษาเนื้อหาที่มีความสนใจเพื่อใช้ในการประกอบการเรียนการสอนเพิ่มเติมได้ โดยมีเนื้อหาดังนี้

1. ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
3. การประยุกต์ของอนุพันธ์
4. การอินทิเกรต
5. เทคนิคการอินทิเกรต
6. อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราแคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอนของนักศึกษาและผู้ที่ต้องการใช้ประกอบการศึกษาเพิ่มเติม

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดา ที่มีพระคุณอันยิ่งใหญ่มหาศาลหาสิ่งอื่นใดเสมอมิได้ และผู้เขียนขอโอกาสนี้แสดงการวะและกตัญญูตเวทีต่อ คุณครู อาจารย์ทุก ๆ ท่านของผู้เขียน รวมทั้งผู้ช่วยศาสตราจารย์เมธี ลิ้มอักษร ผู้ช่วยศาสตราจารย์เสกสรรค์ คำกระบี่ รองศาสตราจารย์ ดร. สมใจ จิตต์พิทักษ์ รองศาสตราจารย์ ดร. วิชัย ชำนิ รองศาสตราจารย์สมศักดิ์ โพธิ์วิจิตร รองศาสตราจารย์ สุพจน์ ชะนะมา รองศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ ทองอยู่ ศาสตราจารย์ ดร. สมหวัง พิธิยานุวัฒน์ ศาสตราจารย์ ดร. อุทุมพร จามรมาน อาจารย์ ดร. อนุรักษ์ ตนานนท์ และรองศาสตราจารย์ ดร. กิตติพร ปัญญาบุญโณผล ที่เป็นบูรพคณาจารย์ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้และประสบการณ์ต่าง ๆ ให้แก่ผู้เขียน รวมถึงเพื่อนร่วมงานทุกคน และท้ายสุดครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่งที่สุดของผู้เขียนตลอดมา

รองศาสตราจารย์ ดร. ชีระศักดิ์ อูร์จนาพันธ์

สารบัญ

		หน้า
บทที่ 1	ขีดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	1
	ขีดของฟังก์ชัน	1
	แบบฝึกหัด 1.1	22
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.1	24
	ขีดอนันต์และขีดที่อนันต์	25
	แบบฝึกหัด 1.2	41
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.2	42
	ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	43
	แบบฝึกหัด 1.3	53
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.3	55
บทที่ 2	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	57
	ส่วนเปลี่ยนแปลงและอนุพันธ์	57
	แบบฝึกหัด 2.1	73
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.1	77
	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต	79
	แบบฝึกหัด 2.2	99
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.2	101
	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	103
	แบบฝึกหัด 2.3	112
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.3	114
	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	115
	แบบฝึกหัด 2.4	132
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.4	133
	อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณมิติ	135
	แบบฝึกหัด 2.5	149
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.5	150

	หน้า
อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	151
แบบฝึกหัด 2.6	175
คำตอบแบบฝึกหัด 2.6	177
ฟังก์ชันไฮเพอร์บอลิก	178
แบบฝึกหัด 2.7	187
คำตอบแบบฝึกหัด 2.7	188
ผลต่างอนุพันธ์	189
แบบฝึกหัด 2.8	203
คำตอบแบบฝึกหัด 2.8	206
บทที่ 3 การประยุกต์ของอนุพันธ์	209
อัตราสัมพัทธ์	209
แบบฝึกหัด 3.1	217
คำตอบแบบฝึกหัด 3.1	220
ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	221
แบบฝึกหัด 3.2	235
คำตอบแบบฝึกหัด 3.2	236
ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์	237
แบบฝึกหัด 3.3	253
คำตอบแบบฝึกหัด 3.3	254
ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์	255
แบบฝึกหัด 3.4	261
คำตอบแบบฝึกหัด 3.4	262
โจทย์ประยุกต์เกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด	263
แบบฝึกหัด 3.5	272
คำตอบแบบฝึกหัด 3.5	274
รูปแบบไม่กำหนด	263
แบบฝึกหัด 3.6	283
คำตอบแบบฝึกหัด 3.6	284

	หน้า
รูปแบบไม่กำหนด ชนิด $\frac{\infty}{\infty}$	285
แบบฝึกหัด 3.7	297
คำตอบแบบฝึกหัด 3.7	298
บทที่ 4 การอินทิเกรต	299
อินทิกรัลไม่จำกัดเขต	299
การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต	302
แบบฝึกหัด 4.1	313
คำตอบแบบฝึกหัด 4.1	314
การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย	315
การอินทิเกรตฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล	315
แบบฝึกหัด 4.2	321
คำตอบแบบฝึกหัด 4.2	322
การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ	323
แบบฝึกหัด 4.3	327
คำตอบแบบฝึกหัด 4.3	328
การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ยกกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก	329
แบบฝึกหัด 4.4	341
คำตอบแบบฝึกหัด 4.4	343
การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิตในรูปกำลังสอง	345
แบบฝึกหัด 4.5	365
คำตอบแบบฝึกหัด 4.5	366
การอินทิเกรตฟังก์ชันไฮเพอร์บอลิก	367
แบบฝึกหัด 4.6	371
คำตอบแบบฝึกหัด 4.6	372

	หน้า
บทที่ 5	
เทคนิคการอินทิเกรต	373
การอินทิเกรตทีละส่วน	373
แบบฝึกหัด 5.1	385
คำตอบแบบฝึกหัด 5.1	386
การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ	387
แบบฝึกหัด 5.2	402
คำตอบแบบฝึกหัด 5.2	403
การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย	405
แบบฝึกหัด 5.3	426
คำตอบแบบฝึกหัด 5.3	427
การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปรใหม่	429
แบบฝึกหัด 5.4	437
คำตอบแบบฝึกหัด 5.4	438
บทที่ 6	
อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์	439
อินทิกรัลจำกัดเขต	439
แบบฝึกหัด 6.1	463
คำตอบแบบฝึกหัด 6.1	464
การประยุกต์อินทิกรัลจำกัดเขต	465
แบบฝึกหัด 6.2	491
คำตอบแบบฝึกหัด 6.2	494
ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบ	495
แบบฝึกหัด 6.3	520
คำตอบแบบฝึกหัด 6.3	522
การหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบวิธีเปลือกทรงกระบอก	523
แบบฝึกหัด 6.4	542
คำตอบแบบฝึกหัด 6.4	544
ความยาวของเส้นโค้งระนาบ	545
แบบฝึกหัด 6.5	558
คำตอบแบบฝึกหัด 6.5	560

	หน้า
ภาคผนวก	561
พีชคณิตพื้นฐาน	562
สมบัติของเลขชี้กำลังและลอการิทึม	562
สรุปภาคตัดกรวย	563
ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	568
เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ	569
สูตรการหาอนุพันธ์	571
สูตรการอินทิเกรต	572
บรรณานุกรม	573

บทที่ 1

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน (The limit of a function)

ลิมิตของฟังก์ชันเป็นพื้นฐานที่สำคัญอย่างยิ่งในวิชาแคลคูลัส เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นก่อนที่จะนิยามแนวคิดของลิมิต จะพิจารณาตัวอย่างที่จะนำไปสู่ความเข้าใจความหมายเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันดังนี้

ตัวอย่าง 1.1.1 กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 + 1$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ มีค่าเป็นอย่างไร เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 มาก ๆ

วิธีทำ สร้างตารางแสดงค่าของ $f(x)$ สำหรับ x บางค่าที่น้อยกว่า 3 แต่มีค่าใกล้ ๆ 3

x	2.9	2.99	2.999	...
$f(x) = 2x^2 + 1$	17.82	18.8802	18.98802	...

จากตารางจะเห็นว่า เมื่อ x ที่น้อยกว่า 3 ยังมีค่าเพิ่มขึ้นใกล้ ๆ 3 แล้ว $2x^2 + 1$ มีค่าเข้าใกล้ ๆ 19 เราจะกล่าวว่า 19 เป็นลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางซ้ายมือ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x^2 + 1 = 19 \quad \blacksquare$$

แล้วสร้างตารางแสดงค่าของ $f(x)$ สำหรับ x บางค่าที่มากกว่า 3 แต่มีค่าใกล้ ๆ 3 เหมือนกัน

x	3.1	3.01	3.001	...
$f(x) = 2x^2 + 1$	20.22	19.1202	19.012002	...

จากตารางจะเห็นว่า เมื่อ x ที่มากกว่า 3 ยังมีค่าน้อยลงใกล้ ๆ 3 แล้ว $2x^2 + 1$ มีค่าเข้าใกล้ ๆ 19 เราจะกล่าวว่า 19 เป็นลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางขวามือ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x^2 + 1 = 19 \quad \blacksquare$$

2 แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร

ลิมิตด้านเดียว (One – sided limits)

จากตัวอย่าง 1.1.1 เราอาจให้ความหมายของลิมิตด้านเดียวของฟังก์ชันได้ดังนี้

1. ลิมิตซ้าย (Left – hand limits)

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ a เป็นจำนวนจริง กล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง L ที่ทำให้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

2. ลิมิตขวา (Right – hand limits)

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ a เป็นจำนวนจริง กล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวามือ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง L ที่ทำให้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางขวามือ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

ตัวอย่าง 1.1.2 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x+1, & x \geq 2 \end{cases}$

จงหา 1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

วิธีทำ สร้างตารางเมื่อ $x < 2$ และมีค่าเข้าใกล้ 2 บางค่า ดังนี้

x	1.9	1.99	1.999	...
$f(x) = x^2$	3.61	3.9601	3.99601	...

จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \quad \blacksquare$$

สร้างตารางเมื่อ $x > 2$ และมีค่าเข้าใกล้ 2 บางค่า ดังนี้

x	2.1	2.01	2.001	...
$f(x) = x+1$	3.1	3.01	3.001	...

จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 1.1.3 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$

จงหา 1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

วิธีทำ สร้างตารางเมื่อ $x < 1$ และมีค่าเข้าใกล้ 1 บางค่า ดังนี้

x	0.9	0.99	0.999	...
$f(x) = 2x + 1$	2.8	2.98	2.998	...

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ ■

สร้างตารางเมื่อ $x > 1$ และมีค่าเข้าใกล้ 1 บางค่า ดังนี้

x	1.1	1.01	1.001	...
$f(x) = 5$	5	5	5	...

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5$ ■

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 1.1.1 จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$

จากตัวอย่าง 1.1.2 จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

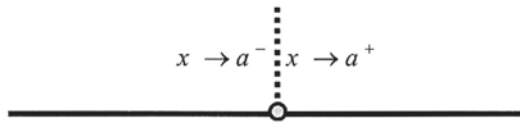
จากตัวอย่าง 1.1.3 จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$

แสดงให้เห็นว่าลิมิตของฟังก์ชันที่จุดใด ๆ ในโดเมน ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดนั้นเสมอไป เพราะมีฟังก์ชันที่ลิมิตซ้ายของฟังก์ชันบางจุดไม่เท่ากับลิมิตขวาของฟังก์ชันนั้นที่จุดเดียวกัน หรือลิมิตซ้าย และลิมิตขวาของฟังก์ชันที่บางจุดในโดเมนไม่เท่ากับค่าของฟังก์ชันที่จุดนั้นในโดเมน

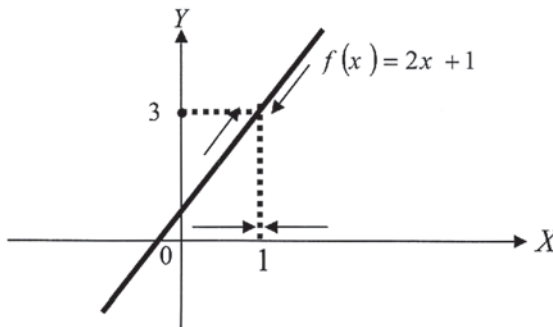
4 แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร

ลิมิตสองด้าน

เป็นการพิจารณาค่าของ $f(x)$ ในขณะที่ยกเข้าใกล้ a โดยที่ “เข้าใกล้ a ” ในที่นี้หมายถึงเข้าใกล้ทั้งสองด้านคือ ด้านซ้ายมือของ a และด้านขวามือของ a



เช่น กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$ เป็นกราฟเส้นตรง ดังรูป 1.1.1



รูป 1.1.1

จากกราฟของ $f(x)$ จะพบว่า

$$\text{ถ้า } x \rightarrow 1^- \text{ แล้วจะได้ } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

$$\text{ถ้า } x \rightarrow 1^+ \text{ แล้วจะได้ } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

จากลักษณะดังกล่าวนี้กล่าวได้ว่า ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ยกเข้าใกล้ 1 มีค่าเท่ากับ 3 ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

(สัญลักษณ์ $x \rightarrow 1$ หมายถึง x เข้าใกล้ 1 ทั้ง 2 ด้าน)

โดยทั่วไปอาจกล่าวได้ว่า

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ a เป็นจำนวนจริงแล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ในขณะที่ยกเข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ยกเข้าใกล้ a ทั้งทางด้านซ้ายมือและขวามือของ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

หมายเหตุ 1. ในกรณีที่ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ โดยที่ $L_1 \neq L_2$ หรือ

2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้ หรือ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้

จะกล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ หาค่าไม่ได้

เช่นจาก $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x+1, & x \geq 2 \end{cases}$

จึงได้ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$ และ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

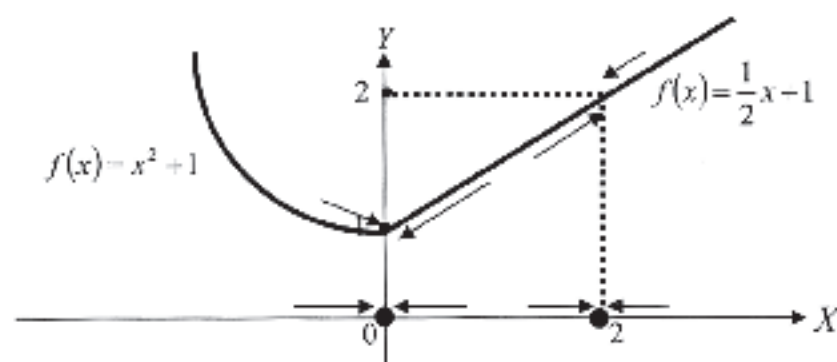
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 1.1.4 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x + 1, & x > 0 \end{cases}$

จงหา 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ มีลักษณะดังรูป 1.1.2



รูป 1.1.2

จากกราฟของ $f(x)$ จะพบว่า

1. เมื่อ $x < 0$ แล้วจะได้ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1$

เมื่อ $x > 0$ แล้วจะได้ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = 1$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

2. เมื่อ $x < 2$ แล้วจะได้ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = 2$

เมื่อ $x > 2$ แล้วจะได้ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = 2$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

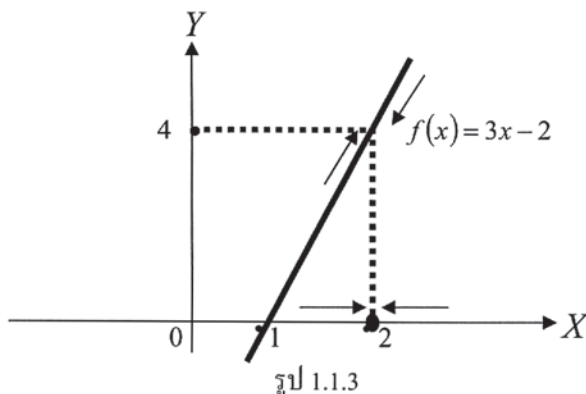
6 แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร

ตัวอย่าง 1.1.5 กำหนด $f(x) = 3x - 2$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ และ $g(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ และ $x \neq 2$

จงหา 1. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

วิธีทำ 1. พิจารณากราฟของ $f(x) = 3x - 2$ มีลักษณะดังรูป 1.1.3



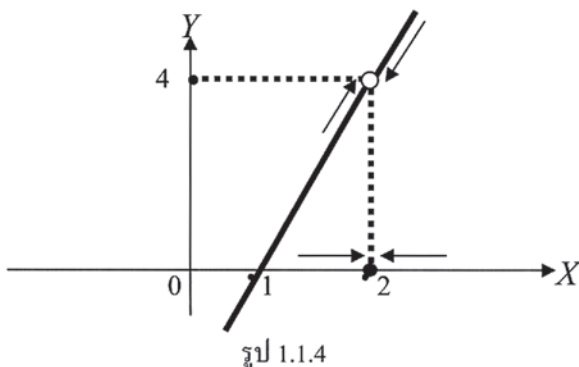
จากกราฟของ $f(x)$ จะพบว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$ และ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ ■

2. จากฟังก์ชัน $g(x)$ ที่กำหนดให้ จะได้ว่า $g(2)$ ($x \neq 2$) ไม่นิยามไว้ และจะได้

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} = \frac{(3x - 2)(x - 2)}{x - 2} \\ &= 3x - 2 \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \text{ และ } x \neq 2 \end{aligned}$$

และกราฟของฟังก์ชัน $g(x)$ มีลักษณะดังรูป 2.4



จากกราฟของ $g(x)$ จะพบว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 4$ และ $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 4$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$ ■

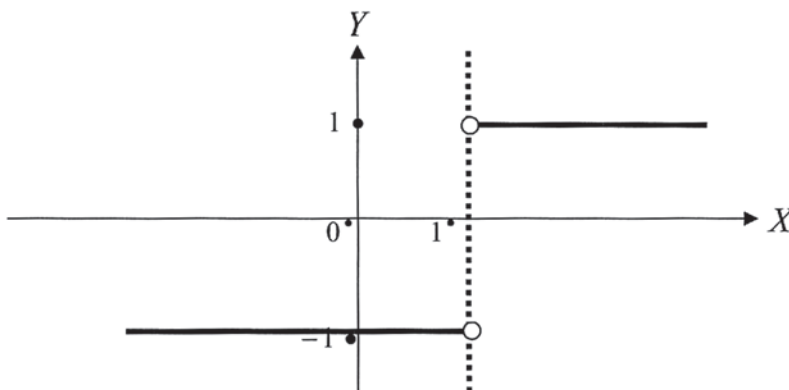
ตัวอย่าง 1.1.6 กำหนด $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

จงหา 1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

วิธีทำ จาก $x \neq 1$ แล้วจะได้ $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 > 0; x > 1 \\ -(x-1), & x-1 < 0; x < 1 \end{cases}$

ดังนั้น $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1} = 1, & x > 1 \\ \frac{-(x-1)}{x-1} = -1, & x < 1 \end{cases}$

กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ มีลักษณะดังรูป 1.1.5



รูป 1.1.5

จากกราฟของ $f(x)$ จะพบว่า

1. เมื่อ $x < 1$ แล้วจะได้ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1$
2. เมื่อ $x > 1$ แล้วจะได้ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$
3. จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ■

ข้อสังเกต ในการหาลิมิตของฟังก์ชันมีข้อสังเกตบางประการดังนี้

1. กรณีที่ $f(a)$ ไม่สามารถหาค่าได้ แต่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ อาจหาค่าได้
2. กรณีที่ $f(a)$ หาค่าได้ แต่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ อาจหาค่าไม่ได้
3. กรณีที่ $f(a)$ และ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ แต่ค่าทั้งสองไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

นิยามของลิมิต

ความหมายที่ชัดเจนของลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เท่ากับจำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a มีดังนี้

นิยาม 1.1.1 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x)$ นิยามบนช่วงเปิดที่มี a (อาจไม่นิยามที่จุด a) จะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ a เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε (อ่านว่า เอปซิลอน (Epsilon)) หรือ $\varepsilon > 0$ จะสามารถหาจำนวนจริงบวก δ (อ่านว่า เดลต้า (Delta)) หรือ $\delta > 0$ ได้อย่างน้อยหนึ่งค่า ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่า x ที่ $0 < |x - a| < \delta$

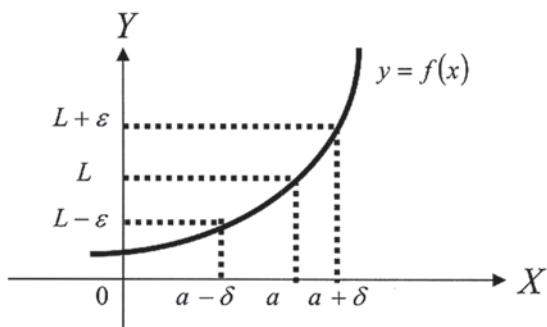
สัญลักษณ์ $|f(x) - L| < \varepsilon$ หมายถึง $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

นั่นคือ $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

สัญลักษณ์ $0 < |x - a| < \delta$ หมายถึง $-\delta < x - a < \delta$ หรือ $0 < x - a < \delta$

นั่นคือ $a - \delta < x < a + \delta$ และ $x \neq a$

ซึ่งอาจกล่าวได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ หมายความว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ สามารถหา $\delta > 0$ ได้ค่าหนึ่งเสมอ ที่ทำให้ $f(x)$ อยู่ในช่วงเปิด $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วงเปิด $(a - \delta, a + \delta)$ และ $x \neq a$ ซึ่งจะเห็นว่า สำหรับ ε ที่มีค่าน้อย ๆ และ $f(x)$ อยู่ในช่วงเปิด $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ [$f(x)$ เข้าใกล้ L] จะสามารถเลือก $\delta > 0$ ที่น้อยเพียงพอ ที่จะทำได้ว่า ถ้า x อยู่ในช่วงเปิด $(a - \delta, a + \delta)$ และ $x \neq a$ แล้ว $f(x)$ จะอยู่ในช่วงเปิด $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ดังรูป 1.1.6



รูป 1.1.6

ตัวอย่าง 1.1.7 จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3$ โดยใช้นิยาม

วิธีทำ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ต้องการหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|(2x+1)-3| < \varepsilon$ โดยที่ $0 < |x-1| < \delta$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณาจาก } |(2x+1)-3| &= |2x+1-3| \\ &= |2x-2| \\ &= 2|x-1| \end{aligned}$$

ดังนั้นถ้าให้ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ จะได้ว่า

สำหรับจำนวนจริง x โดยที่ $0 < |x-1| < \delta$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned} |(2x+1)-3| &= 2|x-1| < 2\delta = 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \\ &= 2|x-1| < \varepsilon \end{aligned}$$

จากนิยามจะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3$ ■

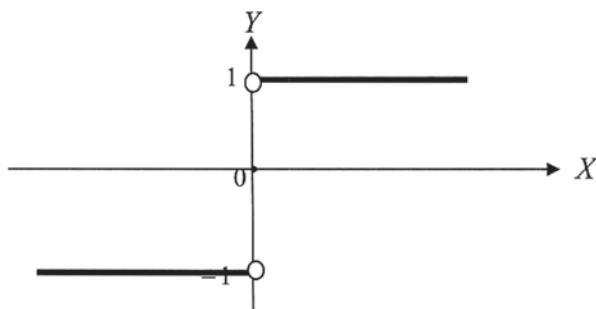
หมายเหตุ ถ้า $f(x)$ ไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดเลย เมื่อ x เข้าใกล้ a กล่าวคือ ไม่มีจำนวนจริง L ที่สอดคล้องตามนิยามที่ทำให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

10 แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร

ตัวอย่าง 1.1.8 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x \leq 0 \end{cases}$

จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ โดยใช้นิยาม

วิธีทำ กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ มีลักษณะดังรูป 1.1.7



รูป 1.1.7

สมมติว่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

กำหนดให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ต้องการหาค่า $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - 1| < \frac{1}{2} \text{ โดยที่ } 0 < |x| < \delta$$

จะเห็นว่า ถ้า $x < 0$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 0 แล้วค่าของ $f(x) = -1$ เสมอ

ดังนั้นจะได้ว่า $|f(x) - 1| = |-1 - 1| = 2$ ซึ่งไม่น้อยกว่า $\frac{1}{2}$

จึงได้ว่า สำหรับ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ไม่สามารถหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - 1| < \frac{1}{2}$

นั่นคือ ถ้า $0 < |x| < \delta$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 1$

และในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ L เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ตาม ก็สามารถแสดงได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq L \text{ ตามนิยาม}$$

จึงกล่าวได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ■

และสรุปได้ว่า การหาขีดของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a เริ่มจากการพิจารณาว่า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริงใด ๆ หรือไม่ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a โดยไม่สนใจค่าของ $f(a)$ และถ้าพบว่า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียว เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a แล้วจะต้องเสมอได้ว่า L สอดคล้องตามนิยาม จึงจะเขียนได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ แต่ถ้าไม่มีจำนวนจริง L ที่สอดคล้องตามนิยาม แล้วจะได้ว่า

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

นิยาม 1.1.2 ลิมิตซ้าย (Left - hand limit)

ให้ f นิยามบนช่วงเปิด (a,b) จะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ M_1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้าย และเขียน $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M_1$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกจำนวนจริงบวก $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ จะสามารถหาจำนวนจริงบวก $\delta (\delta > 0)$ ได้อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $|f(x) - M_1| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่า x ที่ $a - \delta < x < a$ และเรียก M_1 ว่า ลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a

นิยาม 1.1.3 ลิมิตขวา (Right - hand limit)

ให้ f นิยามบนช่วงเปิด (a,b) จะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ M_2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา และเขียน $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = M_2$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกจำนวนจริงบวก $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ จะสามารถหาจำนวนจริงบวก $\delta (\delta > 0)$ ได้อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $|f(x) - M_2| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่า x ที่ $a < x < a + \delta$ และเรียก M_2 ว่า ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a

เราสามารถใช้นิยามของลิมิตพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันที่ใช้ในการอ้างในการหาค่าลิมิต โดยไม่ต้องสรุปค่าลิมิตจากการพิจารณาค่า $f(x)$ จากค่า x หลายๆ ค่าอีกต่อไป หรือไม่ต้องใช้วิธีการพิจารณาจากตารางหรือจากกราฟของฟังก์ชัน เพราะข้อจำกัดในการเขียนกราฟของฟังก์ชันในกรณีที่เป็นฟังก์ชันยุ่งยาก อาจจะเขียนกราฟไม่แม่นยำนัก จึงใช้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับลิมิต จะทำให้การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้ง่ายขึ้น

ทฤษฎีลิมิต (Theorems on limits)

กำหนดให้ a, c, A, B เป็นจำนวนจริง ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ แล้ว

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ
4. $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cA$
5. $\lim_{x \rightarrow a} cx^n = ca^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ

12 แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร

$$6. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A - B$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0] = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0$$

$$9. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \bullet g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \bullet \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \bullet B$$

$$10. \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \text{ เมื่อ } B \neq 0$$

$$11. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = A^n \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{A} \text{ เมื่อ } \sqrt[n]{A} \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{m}{n}} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\frac{m}{n}} = A^{\frac{m}{n}} \text{ เมื่อ } \sqrt[n]{A} \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

หมายเหตุ ทฤษฎีดังกล่าวเป็นจริง เมื่อแทนลิมิตของฟังก์ชันที่ a ด้วยลิมิตทางซ้าย หรือแทนลิมิตของฟังก์ชันที่ a ด้วยลิมิตทางขวา

$$14. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

$$15. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ข้อควรระวัง ในการหา $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ มีดังนี้

$$1. \text{ จะใช้ทฤษฎี 10 ในการหาลิมิตได้ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ หาค่าได้ และ } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ หาค่าได้ และไม่เท่ากับ } 0$$

$$2. \text{ กรณีที่ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ หาค่าได้ และไม่เท่ากับ } 0 \text{ แต่ } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าไม่ได้

3. กรณีที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ เราเรียกรูปแบบ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ว่า

รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate Form) ในกรณีเช่นนี้ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ อาจจะหาค่าได้หรือหาค่าไม่ได้

ขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชัน การหาลิมิตจึงจำเป็นต้องเปลี่ยนรูปแบบฟังก์ชัน $\frac{f(x)}{g(x)}$ ใหม่ ในรูป $h(x)$

โดยที่ $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$ ทุกค่า x ในโดเมนของ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ยกเว้นเมื่อ $x = a$ โดยอาศัยความรู้ทางพีชคณิต

ดังนั้นจะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

การเปลี่ยนแปลงรูปแบบฟังก์ชันใหม่ อาจใช้วิธีการแยกตัวประกอบ หรือลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป
อัตราส่วน ควรใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม หรือวิธีที่ทำให้ฟังก์ชันอัตราส่วนหายไปจากตัวเศษหรือตัว
ส่วน โดยใช้สังยุคของฟังก์ชันอัตราส่วนนั้นคูณทั้งเศษและส่วน

ตัวอย่าง 1.1.9 จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x \rightarrow 2} 4$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} x$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} x^3$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} 4x^3$

5. $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 + 5x)$

6. $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 - 6x^2 - 9x + 1)$

วิธีทำ

1. $\lim_{x \rightarrow 2} 4 = 4$ (ทฤษฎี 1) ■

2. $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$ (ทฤษฎี 2) ■

3. $\lim_{x \rightarrow -1} x^3 = (-1)^3 = -1$ (ทฤษฎี 3) ■

4. $\lim_{x \rightarrow 2} 4x^3 = 4(2)^3 = 32$ (ทฤษฎี 5) ■

5. จากทฤษฎี 5 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow -2} 3x^2 = 3(-2)^2 = 12$ และ $\lim_{x \rightarrow -2} 5x = 5(-2) = -10$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 + 5x) = \lim_{x \rightarrow -2} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow -2} 5x$ (ทฤษฎี 6)

$$= 12 + (-10)$$

$$= 2 \quad \blacksquare$$