

SERIES 8

e-book : Series 8

DRIVING RANGE OF LINEAR ALGEBRA

ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์

THEORY AND PROBLEMS

คณิตศาสตร์

วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENTISTS

FREE!
CALCULUS CONCEPT
MAPS



เมทริกซ์ พีชคณิตเชิงเส้น และการประยุกต์ METRIX LINEAR ALGEBRA AND THEIR APPLICATIONS

- ✓ สรุปลูตรนิยาม ทฤษฎี และตัวประกอบ
- ✓ 457 ตัวอย่างโจทย์พร้อมเฉลยโดยละเอียด
- ✓ 1371 โจทย์ปัญหาพร้อมคำตอบทุกข้อ
- ✓ 188 กราฟโดยโปรแกรม Mathcad & Mathematica & Maple

รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แววจริญ

รองศาสตราจารย์ ดร. ชนศักดิ์ ป้ายเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ



ประวัติผู้แต่ง



รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แวเวเจริญ



รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

การศึกษา

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.บางเขน
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.พิษณุโลก
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)
- ค.ด. (อุดมศึกษา), Cognate : สถิติ-วิจัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประสบการณ์

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ, ฝ่ายพัฒนา, ฝ่ายกิจการนักศึกษา
- รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

ปัจจุบัน

- ดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ (มจพ.)

ผลงานตำราวิชาการร่วมกัน

- SERIES 1 อนุพันธ์และการประยุกต์
- SERIES 2 อินทิกรัลและการประยุกต์
- SERIES 3 แคลคูลัสหลายตัวแปร
- SERIES 4 การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์

- SERIES 5 สมการเชิงอนุพันธ์ 1
- SERIES 6 สมการเชิงอนุพันธ์ 2 และการแปลงลาปลาซ
- SERIES 7 เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ, 3 มิติ
- SERIES 8 เมตริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น

ผลงานวิจัย

- สื่อการเรียนการสอนสำหรับวิชาแคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ใน 3 มิติ
- Computer-assisted instruction (CAI) in Calculus
- สื่อการเรียนการสอนสำหรับ ปริพันธ์ของฟังก์ชัน 1: ความหมายของปริพันธ์จำกัดเขต ปริยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
- Adomian Decomposition Method for Solving a Non-Linear Shallow Water Tsunami Model of Coupled Partial Differential Equations
- Development of a Mathematical Model of the Inshore Tsunami Wave Equations by Lax-Wendroff Numerical Method

- Elliptic Number และเส้นรอบวงของวงรี
- Elliptic Number and Approximation Function
- การทดสอบการรู้เข้าของอนุกรมโดยใช้คอมพิวเตอร์
- The Development of The Prerequisite Model in Basic Mathematics Course for Science and Technology Undergraduate Curricular by Using Concept Maps
- การใช้คอมพิวเตอร์สร้างฟังก์ชันไมโครสโคป

การประยุกต์บางเรื่องของเมทริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น

Some Applications of Matrix and Linear Algebra

Analytic Geometry

วงกลมผ่านจุด 3 จุด แทนด้วย

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Analytic Geometry

ระนาบผ่านจุด 3 จุด แทนด้วย

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Analytic Geometry

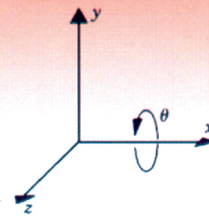
ทรงกลมผ่านจุด 4 จุด แทนด้วย

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Computer Graphics

หมุนรอบแกน x แทนด้วย

Rotation about the x-axis

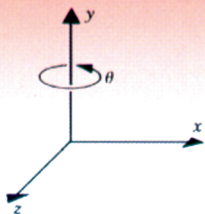


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Computer Graphics

หมุนรอบแกน y แทนด้วย

Rotation about the y-axis

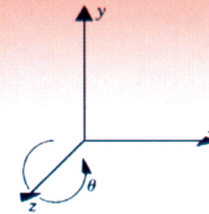


$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Computer Graphics

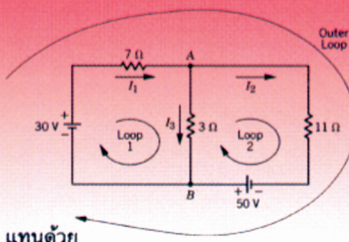
หมุนรอบแกน z แทนด้วย

Rotation about the z-axis



$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

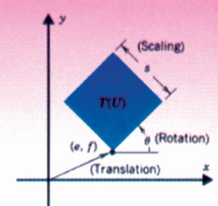
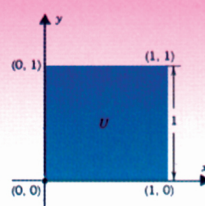
Electrical Networks



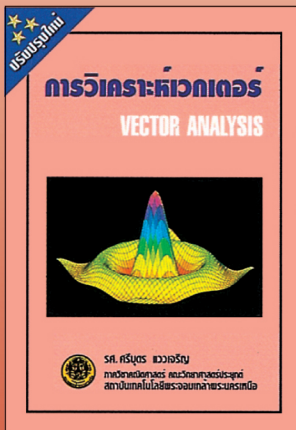
$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ 7I_1 + 3I_3 &= 30 \\ 11I_2 - 3I_3 &= 50 \end{aligned}$$

Fractals ; Similitude

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = s \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$



ผลงานของอาจารย์ผู้เขียนทั้งสองท่าน



SERIES 1, 2, 3 และ 7 เหมาะสำหรับผู้นิสิต นักศึกษา ปีที่ 1

SERIES 4, 5, 6 และ 8 เหมาะสำหรับผู้นิสิต นักศึกษา ปีที่ 2

ISBN: 978-616-590-463-6

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย ตาม พ.ร.บ. ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2521

ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

<http://www.kmutnb.ac.th>



เบตริกซ์ พีชคณิตเชิงเส้น
และการประยุกต์

299.- (7.99 \$)

คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรและวิทยาศาสตร์ (MATHEMATICS OF ENGINEER AND SCIENTISTS)

เมทริกซ์ พีชคณิตเชิงเส้น และ การประยุกต์ของพีชคณิตเชิงเส้น
(MATRIX LINEAR ALGEBRA AND THEIR APPLICATIONS)



รวบรวมและเรียบเรียงโดย

รศ. ศรีบุตร แววจริญ

รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ราคา 299 บาท (7.99 USD)

คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

MATHEMATICS OF ENGINEER AND SCIENTISTS

เมทริกซ์ พีชคณิตเชิงเส้นและการประยุกต์

MATRIX LINEAR ALGEBRA AND THEIR APPLICATIONS

Linear Algebra : e-book:Series 8

ISBN 974-974-350-227-9 สำหรับหนังสือ Series 8

ISBN (e-book) 978-616-590-463-6 สำหรับ e-book : Series 8

เมทริกซ์พีชคณิตเชิงเส้นและการประยุกต์

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย พ.ร.บ.ลิขสิทธิ์ พศ. 2521

ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

วันวางจำหน่าย : 20-04-2022

ขนาดไฟล์ : 105 MB

จำนวนหน้า : 687 หน้า

ประเทศ : THAILAND

ประเภทไฟล์ : PDF

ภาษา : Thai

ออกแบบปกและ Artwork ทินพัฒน์ แวเจริญ ภาควิชาสถิติประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

จัดทำโดย

รศ.ศรีบุตร แวเจริญ และ รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

ซื้อหนังสือ e-book:Series 8 เล่มนี้

ราคา 299 บาท (7.99 USD)

การสั่งซื้อ ebook series 8 สามารถติดต่อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาฯทุกสาขา

รศ. ศรีบุตร แวเจริญ

Tel. 081-904-1608

ID Line sribudh

E-mail : swr@kmitnb.ac.th

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

Tel. 081-908-5090

ID Line mala0928

E-mail : chanasak.b@op.kmitnb.ac.th

คำนำ

การเรียนรู้แคลคูลัสกับการเล่นกีฬามีลักษณะคล้ายกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งกีฬากอล์ฟ “ไทเกอร์ วูดส์” นักกอล์ฟสายเลือดลูกครึ่ง ไทย-อเมริกัน ดังระเบิดไปทั่วโลก ด้วยประวัติการเรียนและกีฬากอล์ฟอันเยี่ยมยอด เป็นแชมป์กอล์ฟเยาวชนของสหรัฐหลายสมัย หลังการก้าวเข้าสู่กอล์ฟอาชีพเพียงเวลาไม่กี่เดือน ก็สามารถคว้าแชมป์กอล์ฟรายการใหญ่ได้หลายรายการ ด้วยวัยเพียง 21 ปี ด้านการเรียน มีผลการเรียนดีเยี่ยมสามารถเข้าเรียนในมหาวิทยาลัย ซึ่งเป็นมหาวิทยาลัยท็อปเทนของสหรัฐ ผู้เขียนอยากนำทั้งสองสิ่งมาหล่อหลอมเข้าด้วยกัน เพื่อให้บัณฑิต นักศึกษา และผู้สนใจในวิชาแคลคูลัสได้มองภาพในอนาคตได้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้น โดยนำกีฬากอล์ฟมาอธิบายเปรียบเทียบ หนังสือเล่มนี้ได้ตั้งชื่อว่า “ **สนามฝึกซ้อมวิชาแคลคูลัส** ” (Driving Range of Calculus) เช่นเดียวกับกีฬากอล์ฟซึ่งมี **สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ** (Driving Range of Golf) ก่อนที่จะเข้าสนามฝึกซ้อมคงต้องศึกษานิยามทฤษฎี และคุณสมบัติต่างๆ จากห้องเรียนจนเข้าใจดีพอ แล้วจึงนำหนังสือเล่มนี้มาฝึกฝนให้เกิดความเข้าใจให้ดียิ่งขึ้น

หนังสือเล่มนี้ได้ใช้เทคโนโลยีสมัยใหม่ มาช่วยทำให้รูปแบบของหนังสือดีมีคุณค่ายิ่งขึ้น โดยใช้โปรแกรม **Mathcad** และ **Maple** ซึ่งทำให้ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ สามารถมองเห็นโจทย์ปัญหานั้นๆ ได้เป็นรูปธรรมมากขึ้น

แคลคูลัสเป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งของสาขาคณิตศาสตร์ และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาไปใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาต่างๆ ของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ ใช้ได้ดี นิสิตนักศึกษา จำเป็นต้องศึกษาวิชาพื้นฐานให้เข้าใจถ่องแท้ก่อน จากประสบการณ์ด้านการสอนมากกว่า 40 ปี ในสถาบันแห่งนี้ และเป็นอาจารย์พิเศษมหาวิทยาลัยอีกหลายแห่ง จึงได้รวบรวมเขียนออกมาเป็น**แผนที่วิชาแคลคูลัสพื้นฐาน** (Calculus Concept Maps) ตามที่นำเสนอในปกหลังด้านในของหนังสือเล่มนี้นั้น ผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น **e-Book:Series 1-8** โดยแต่ละ **Series** จะมีเนื้อหาความสัมพันธ์กันเกี่ยวข้องกันอยู่ตลอดเวลา ดังนั้น การศึกษาวิชาแคลคูลัสจำเป็นต้องมีพื้นฐานของคณิตศาสตร์ **e-Book:Series** ต้นๆ อยู่ตลอดเวลา

ทางด้านกีฬากอล์ฟนั้นผู้เขียนได้มีโอกาสรับการฝึกอบรมจากคุณครูกอล์ฟ **Bell Penny** (Head Professional-Class A C.P.G.A.) จากโรงเรียนการศึกษากอล์ฟไทย ซึ่งเป็นโรงเรียนกอล์ฟแห่งแรกของประเทศไทย เมื่อปี 1994 ทำให้ผู้เขียนได้เกิดแนวคิดที่จะนำทั้งสองเรื่องนี้ คือ แคลคูลัสและกอล์ฟมา

ผนวกเข้าด้วยกัน ซึ่งมีหลายๆ สิ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบให้นิสิต นักศึกษา ได้มองเห็นภาพการศึกษา แคลคูลัสได้ดียิ่งขึ้นในกีฬากอล์ฟนั้นเราแบ่งฟิท์ออกเป็น 3 ฟิท์ เรียงลำดับตามความสามารถได้ดังนี้ คือ ฟิท์ C มือใหม่ (Beginner) , ฟิท์ B มือสมัครเล่น (Amateur) , ฟิท์ A มืออาชีพ (Professional) การเล่นกอล์ฟนั้น ในการออกรอบ 1 รอบ หรือตีจนครบ 18 หลุมนั้น ต้องใช้ความอดทน ความพยายาม มีจิตใจที่มุ่งมั่น การเล่นกอล์ฟจะต้องแก้ปัญหาเฉพาะหน้าตลอดเวลาและรูปแบบของปัญหานั้นเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอผู้เล่นต้องคิดแก้ปัญหาด้วยตัวเองบนพื้นฐานของประสบการณ์ที่มีอยู่ เมื่อถึงจุดหนึ่งผู้เล่นที่มีพื้นฐานและการฝึกซ้อมดีพอ ผู้เล่นจะสามารถแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้เสมอ โดยที่ผู้เล่นจะต้องนำปัจจัยหลายๆ อย่างมาช่วยในการคิดแก้ปัญหา

ในวิชาแคลคูลัสก็เช่นเดียวกัน เป็นวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์หลายๆ ด้านมาประกอบกัน เพื่อช่วยในการคิดแก้ปัญหา ผู้เขียนจึงได้เขียนปูพื้นตั้งแต่เริ่มต้น ตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแต่เจาะลึกลงไปในแต่ละเรื่องมากกว่าเดิม นักศึกษาที่พื้นฐานยังไม่ดีพอจึงเปรียบเสมือนนักกอล์ฟมือใหม่ ต้องฝึกทำโจทย์ตั้งแต่ต้นในเรื่องพื้นฐานจนเกิดความเข้าใจก่อน จึงจะเริ่มศึกษาในเนื้อหาของวิชาแคลคูลัสได้ เมื่อผู้เรียนฝึกซ้อมจนเข้าใจแล้วก็จะถือว่าอยู่ในระดับมือสมัครเล่น และนักศึกษาจะต้องทำการฝึกฝนต่อไปอีกจนเกิดความเข้าใจ จึงจะถือว่านักศึกษাজดอยู่ในขั้นระดับมืออาชีพ จึงจะสามารถศึกษาในขั้นประยุกต์ได้ ในตำราชุดนี้เปรียบเสมือนสนามฝึกซ้อม มีโจทย์ตัวอย่างมากมายเพียงพอที่จะทำให้นักศึกษาพัฒนาตนเองอยู่ในขั้นมืออาชีพได้อย่างสบาย

หนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 8 ก่อนที่จัดทำเป็น e-book:Series 8 ได้ปรับปรุงมาแล้ว 3 ครั้ง โดยทำการปรับปรุงจากหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 8 จะเน้นในเรื่อง เมทริกซ์ พิชคณิตเชิงเส้น และการประยุกต์ โดยปรับปรุง จากการจัดพิมพ์ครั้งแรกในปี 2546 มีการเพิ่มเนื้อหาและรูปภาพของฟังก์ชันอีกมากมายรวมทั้งรูปเล่ม ตัวหนังสือเป็นสีน้ำเงิน และกราฟของฟังก์ชันสองตัวแปรเป็นรูปพื้นผิวใน 3 มิติ 4 สี เพื่อให้ผู้อ่านดูชัดเจน และสวยงาม นอกจากนี้ผู้เขียนได้เพิ่มตัวอย่างพร้อมแสดงวิธีทำโดยละเอียดที่น่าสนใจจากเดิม รวมตัวอย่างโจทย์เป็น 457 ตัวอย่าง และเพิ่มโจทย์ปัญหาพร้อมคำเฉลย เป็น 1,371 ข้อ และใช้โปรแกรม Maple และ Mathcad วาดกราฟและคำนวณคำเฉลย โดยโปรแกรม Maple ทั้งหมดเป็น 188 รูป เพื่อให้นักศึกษาได้เห็นเป็นรูปธรรมนามธรรมยิ่งขึ้น และเกิดความเข้าใจลึกซึ้ง โดยดูจากกราฟของฟังก์ชันจริง โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในส่วนเฉลยคำตอบเดิมได้ย่อหน้าให้เหลือ 50% ทำให้คำเฉลยดูไม่ชัดเจน ผู้เขียนได้ขยายเป็น 100% เพื่อให้ผู้อ่านได้ตรวจคำตอบได้สะดวกขึ้น จากการเพิ่มข้อมูลต่างๆ ทำให้จำนวนหน้าเพิ่มขึ้นอีกมากกว่าเดิม 576 หน้า เป็น 686 หน้า นักศึกษาได้ฝึกทบทวนเนื้อหา และทดลองทำแบบฝึกหัดวิชานี้ในลักษณะต่างๆ ทำให้เกิดความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีให้ถ่องแท้ อันจะเป็น

พื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนการสอน และการทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพในอนาคตถ้าจะให้หนังสือเล่มนี้เปรียบเทียบกับกีฬากอล์ฟผู้เขียนตั้งใจจะเป็นเช่นเดียวกับ **สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ (Driving Range)** ถ้าใครเข้าสนามฝึกซ้อมมากก็จะทำให้พัฒนาดีขึ้น แล้วจะส่งผลให้นิสิต-นักศึกษา **ข้อสอบกลางภาค (Midterm)** และ**สอบปลายภาค (Final)** ด้วยความมั่นใจ เช่นเดียวกับนักกอล์ฟที่มีความพร้อม และมีความเชื่อมั่นที่ลงสนามแข่งขัน และได้รับรางวัลให้กับตนเองในที่สุด

ผู้เขียนขอกราบขอบคุณ คุณครู-อาจารย์ทุกท่าน ตั้งแต่ประถมจนถึงมหาวิทยาลัยที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้ ขอกราบขอบคุณทุกท่านที่ได้ให้การสนับสนุนหนังสือตั้งแต่ **e-book:Series 1** ถึง **e-book :Series 8** ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานทุกคนที่ได้คอยให้กำลังใจและให้คำแนะนำด้วยดีมาตลอด ขอขอบคุณ คุณ วรณนิภา ขาวผ่อง ที่ทุ่มเทช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดีและขอบคุณนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้ช่วยตรวจต้นฉบับให้เป็นอย่างดี และที่สำคัญที่สุดขอขอบคุณและขอใจ ภรรยา และลูกๆ ของผู้เขียนทั้งสอง : คุณยุพิน แวเวจริญ ลูกแพรวและลูกเพชร คุณวงษ์เดือน บ่ายเที่ยง ลูกคัมและลูกดี ที่ได้ให้กำลังใจในการเขียนมาตลอดและเป็นผู้อยู่เบื้องหลังของความสำเร็จในการจัดทำ นี้

หนังสือ **e-book:Series 8 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร** ปรับปรุงใหม่เล่มนี้จะไม่สามรถเกิดขึ้นได้ ถ้าไม่มีทีมงานของคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ในภาควิชาคณิตศาสตร์และนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์ทั้งในอดีตและปัจจุบัน ดังเช่น **คุณ อูมา รัตนเทพี (MA12)** ที่ช่วยพิมพ์ต้นฉบับและช่วยคำนวณคำตอบและวาดกราฟของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยโปรแกรม Maple **คุณ เวลิน พุดธิระโชติ (MA14)** ที่ช่วยตรวจต้นฉบับอย่างละเอียดทุกบท **ดร.อมรรัตน์ สังสุวรรณ(MA16)** , **คุณ นพดล สวนดอน (MA16)** และ **คุณ บุญผา จิตรโสม (MA20)** ที่ทุ่มเทเวลาช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดียิ่งท้ายสุดนี้ขอขอบใจ **คุณ ทินพัฒน์ แวเวจริญ (AS 23)** ของ **มจพ. (KMUTNB)** ที่ช่วยออกแบบปก และ Artwork ของ **e-book:Series 8 เมทริกซ์ พิชคณิตเชิงเส้น และการประยุกต์** เล่มนี้ทั้งหมด

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือประกอบการเรียนเล่มนี้ คงจะเป็นประโยชน์ต่อนิสิต นักศึกษา ในสถาบันอุดมศึกษาต่างๆ บ้างตามสมควร หากพบข้อบกพร่องที่ควรแก้ไขในหนังสือเล่มนี้ กรุณาเสนอแนะให้ผู้เขียนทราบด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง ขอให้แฟนพันธ์แท้และผู้สนใจคอยติดตาม **e-book:Series 4** ต่อไป

คุณความดีและคุณประโยชน์ทั้งหลายทั้งปวง ขอมอบให้บิดา – มารดา ครู-อาจารย์ ของผู้เขียนทั้งสอง



รศ. ศรีบุตร แวเวจริญ



รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

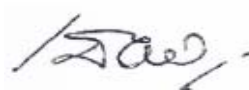
คำนิยม

ท่านผู้คั่นหนังสือ e-book:Series 8 เล่มนี้ทุกท่าน ผมเป็นคนหนึ่งที่ใกล้ชิดและเห็นการทำงาน แนวความคิดและการทำหนังสือของรองศาสตราจารย์ศรีบุตร แวเวเจริญ และ รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง มาโดยตลอด ท่านทั้งสองได้เขียนหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ e-book:Series ออกมา 8 เล่ม อย่างต่อเนื่องและมีการปรับปรุงเนื้อหาใหม่ในหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ทั้ง 8 เล่ม โดยมีการเพิ่มเติมรูปภาพประกอบโจทย์ปัญหาให้เห็นเป็นรูปธรรมและนำเอาโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Maple , Mathcad มาช่วยในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์

ผมเห็นความมุ่งมั่น ตั้งใจของท่านอาจารย์ทั้งสองท่าน คือความสำเร็จที่ยิ่งใหญ่ ที่จะช่วยประเทศไทย แก้ปัญหาการขาดแคลนหนังสือ จากจุดเริ่มต้นดังกล่าว ท่านตั้งใจจะทำหนังสือ e-book:Series 8 เพื่อ ศิษย์ ทำให้หนังสือไม่เพียงใช้เรียนในชั้นเรียนแต่กลับใช้เรียนเสมือนบนเว็บไซต์ที่มีรูปภาพ 4 สี คำอธิบายและโปรแกรมครบทุกส่วน ทำให้ผู้เรียนขยายวงกว้างจากนักเรียนในชั้นเรียน สู่ นักเรียนนอกชั้นเรียนหลายสาขา อาชีพ ตอบสนองต่อยุคศาสตร์ การพัฒนาประเทศด้านการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ เกิดการเรียนรู้ที่ สนับสนุนต่อสังคม การมีการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องตลอดชีวิต

นับเป็นภารกิจของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มจพ.ที่ต้องผลิตหนังสือและ ตำราวิชาการเป็นบริการความรู้แก่สังคม ตามปรัชญาของมหาวิทยาลัยที่ว่า “พัฒนาคณ พัฒนาวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี” และในฐานะของผู้บริหารภาควิชาคณิตศาสตร์ ต้องขอขอบคุณอาจารย์ทั้งสองท่านที่ ปรับปรุงหนังสือ Series 8 เป็น e-book:Series 8 เมทริกซ์ พิชคณิตเชิงเส้น และการประยุกต์ (คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์) ซึ่งนับเป็นบริการด้านสติปัญญาอีกเล่มหนึ่งที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภูมิใจมอบให้แก่สังคม

ขอบคุณครับ



รองศาสตราจารย์ ดร.เสนอ คุณประเสริฐ

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

แถมฟรี

e-book:Series 8 เล่มนี้ ผู้เขียนได้มอบแผ่นพับขนาด A3 รูป 4 สีสวยงามจำนวน

2 แผ่นที่จะเป็นประโยชน์กับนักศึกษาและผู้สนใจวิชา CALCULAS เป็นอย่างดี

1. CALCULUS CONCEPT MAPS

2. FORMULA TABLES OF DERIVATIVES AND INTEGRALS

สารบัญ

เกี่ยวกับผู้แต่ง คำนำ คำนิยม



บทที่ 1 เมทริกซ์ (Matrices)

1.1 ความหมายและสัญลักษณ์	1
1.2 การกระทำระหว่างเมทริกซ์	2
1.3 คุณสมบัติของการกระทำระหว่างเมทริกซ์	6
1.4 เมทริกซ์ที่มีลักษณะพิเศษ	10
1.5 การแบ่งเมทริกซ์	45
1.6 การกระทำเบื้องต้นแบบแถว (หลัก)	49
1.7 เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปเอชลอน	51
1.8 เมทริกซ์เบื้องต้น	66
แบบฝึกหัด	75

บทที่ 2 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

2.1 การจัดลำดับ	78
2.2 ดีเทอร์มิแนนต์	80
2.3 คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์	83
2.4 การกระจายโคแฟกเตอร์	103
แบบฝึกหัด	116

บทที่ 3 เมทริกซ์ผกผัน (Inverse of a Matrix)	
3.1 ซิงกูลาร์และนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ 3.2 แอ็ดจอยท์ของเมทริกซ์ 3.3 การหาเมทริกซ์ผกผัน 3.4 การหาเมทริกซ์ผกผันโดยใช้การกระทำเบื้องต้นแบบแถว 3.5 กฎของแครเมอร์ แบบฝึกหัด	126 131 138 141 149 155
บทที่ 4 ระบบสมการเชิงเส้น (Systems of Linear Equations)	
4.1 สมการเชิงเส้น 4.2 การหาคำตอบโดยวิธีการจัดแบบเกาส์และแบบเกาส์-จอร์แดน 4.3 ระบบสมการเอกพันธ์ 4.4 การตรวจสอบคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น แบบฝึกหัด	165 177 197 207 222
บทที่ 5 ยูคลีเดียนในปริภูมิ n มิติ (Euclidian in n-Space)	
5.1 เวกเตอร์ใน 2 มิติและ 3 มิติ 5.2 เส้นตรงและระนาบใน 3 มิติ 5.3 ยูคลีเดียนในปริภูมิ n มิติ แบบฝึกหัด	230 247 261 269

บทที่ 6 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Space)



6.1	ปริภูมิเวกเตอร์	274
6.2	คุณสมบัติของปริภูมิเวกเตอร์	285
6.3	ปริภูมิย่อย (Subspace)	286
6.4	ผลรวมเชิงเส้น	298
6.5	การแผ่ทั่ว	303
6.6	การบวกและการบวกเชิงเส้น	314
6.7	ความเป็นอิสระเชิงเส้น	317
6.8	ฐานและมิติ	328
6.9	ปริภูมิแถว ปริภูมิหลักและปริภูมิสู่ศูนย์	345
6.10	แรงค์และศูนย์ภาพ	355
6.11	ปริภูมิผลคูณภายใน	363
6.12	ฐานตั้งฉากและกระบวนการแกรม-ชmidt	373
	แบบฝึกหัด	385

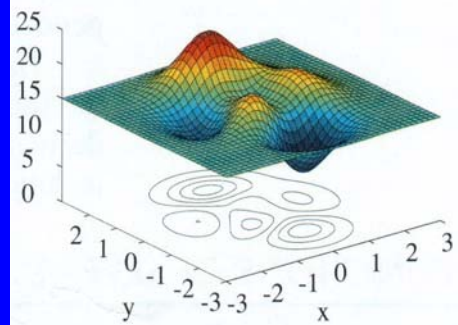
บทที่ 7 การแปลงเชิงเส้น (Linear Transformations)



7.1	การแปลงเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m	400
7.2	การแปลงเชิงเส้นจากปริภูมิทั่วไปไปยังปริภูมิทั่วไป	418
7.3	คุณสมบัติของการแปลงเชิงเส้น	425
7.4	พิสัยและส่วนกลางของการแปลง	431
7.5	ซิงกูลาร์และนอนซิงกูลาร์	453
7.6	พีชคณิตของการแปลงเชิงเส้น	457
7.7	เมทริกซ์ที่คล้ายกัน	461
	แบบฝึกหัด	464

บทที่ 8

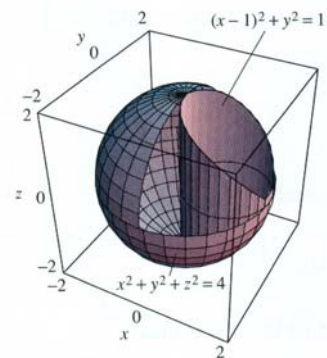
ค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ (Eigen Values and Eigen Vectors)



8.1	ค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์	471
8.2	การทำให้เกิดเมทริกซ์เฉียง	511
8.3	การทำให้เกิดเมทริกซ์เฉียงของเมทริกซ์สมมาตร	527
	แบบฝึกหัด	548

บทที่ 9

การประยุกต์ของพีชคณิตเชิงเส้น (Applications of Linear Algebra)

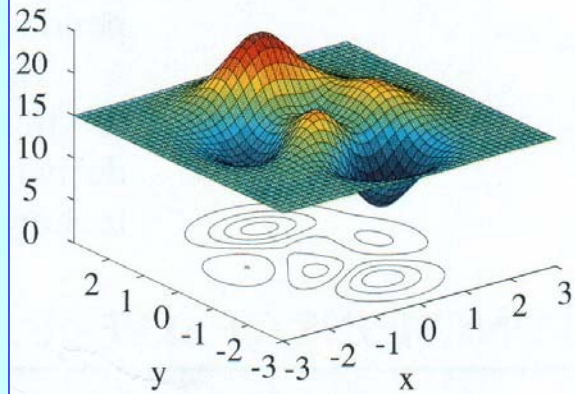


9.1	การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์	555
9.2	การประยุกต์ของวงจรไฟฟ้า	578
9.3	รูปแบบกำลังสอง	588
9.4	การประยุกต์ของภาคตัดกรวย	596
9.5	การประยุกต์ของพื้นผิวกำลังสอง	610
9.6	เรขาคณิตของการกระทำเชิงเส้นบน R^2	621
9.7	เรขาคณิตของการกระทำเชิงเส้นบน R^3	634
	แบบฝึกหัด	648
	เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1- บทที่ 9 จำนวน 1,371 ข้อ	656 - 685
	บรรณานุกรม	686

บทที่ 1

เมทริกซ์

(Matrices)



1.1 ความหมายและสัญลักษณ์

นิยาม 1.1 Matrices

เมทริกซ์ คือ กลุ่มของจำนวนหรือฟังก์ชัน ซึ่งเขียนเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (Rectangular Array) ภายในเครื่องหมาย []

รูปทั่วไป ของเมทริกซ์นั้น เรานิยมเขียนดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 หลักที่ 1 หลักที่ 2 หลักที่ n

← แถวที่ 1
 ← แถวที่ 2
 ← แถวที่ m

จำนวนซึ่งเขียนเรียงกันในแนวนอน รวมเรียกว่า แถว (Row)

จำนวนซึ่งเขียนเรียงกันในแนวตั้ง รวมเรียกว่า หลัก (Column)

จะเห็นว่า เมทริกซ์ A มี m แถว และมี n หลัก เราจะกล่าวว่า A มีขนาด $m \times n$ หรือ มิติ $m \times n$

จากรูปทั่วไปของเมทริกซ์ A เราจะเรียก $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$ แต่ละตัวว่า สมาชิก (Element หรือ Entry) ของเมทริกซ์ A และจะใช้สัญลักษณ์ a_{ij} แทน สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ A และจะกล่าวว่า a_{ij} เป็นสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่ง (i,j) ของเมทริกซ์ A

จากรูปทั่วไปของเมทริกซ์ A เราอาจเขียนได้ย่อๆ ว่า

$$A = [a_{ij}] \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, \dots, m \text{ และ } j = 1, 2, \dots, n$$

หรือ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

เราจะเรียก i ว่า ตัวชี้แถว เพราะเป็นตัวที่บอกให้เราทราบว่าสมาชิกนั้นมาจากแถวใด และจะเรียก j ว่า ตัวชี้หลัก เพราะเป็นตัวที่บอกให้เราทราบว่าสมาชิกนั้นมาจากหลักใด

หมายเหตุ	1. เราอาจใช้เครื่องหมาย () เขียนแทนเครื่องหมาย [] ก็ได้ เช่น $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 2. โดยปกติเรานิยมใช้อักษรโรมันตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C, ... เรียกชื่อเมทริกซ์ และใช้อักษรโรมันตัวพิมพ์เล็ก เช่น a, b, c,... แทนสมาชิกของเมทริกซ์ A,B,C,... ตามลำดับ
นิยาม 1.2 Trace	ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้วเทรส (Trace) ของเมทริกซ์ A ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{Tr}(A)$ คือ ผลบวกของสมาชิกที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ A นั่นคือ $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$
1.2 การกระทำระหว่างเมทริกซ์ (Matrix Operations)	
1.2.1 การเท่ากันของเมทริกซ์ (Equality of Matrices)	
นิยาม 1.3 Equality of Matrix	ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีขนาด $m \times n$ ทั้งคู่ เราจะกล่าวว่า เมทริกซ์ A เท่ากับเมทริกซ์ B ถ้าสมาชิกทุกตัวของ A และ B ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน เท่ากัน
ข้อสังเกต	จากนิยามจะได้ว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$
1.2.2 การบวกเมทริกซ์ (Addition of Matrices)	
นิยาม 1.4 Addition of Matrix	ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีขนาด $m \times n$ ทั้งคู่แล้ว ผลบวกของเมทริกซ์ A และ B เท่ากับ $A + B = C = [c_{ij}]_{m \times n} \text{ โดยที่ } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ เมื่อ } i = 1, 2, \dots, m \text{ และ } j = 1, 2, \dots, n$ จากนิยามจะเห็นว่าการบวกเมทริกซ์นั้นจะทำได้ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน และถ้าเมทริกซ์ทั้งสองมีขนาดเป็น $m \times n$ แล้วผลบวกก็จะเป็นเมทริกซ์ซึ่งมีขนาด $m \times n$ ด้วย ในบางครั้งเราอาจจะเขียนผลบวกของ A และ B ในรูปย่อๆ ดังนี้ $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$
นิยาม 1.5 Zero Matrix	เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix) คือ เมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็น 0 และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 0

	1.2.3 การลบเมทริกซ์ (Subtraction of Matrices)
นิยาม 1.6	ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว
Subtraction of Matrix	$A - B = A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$
หมายเหตุ	ถ้า $A + B = \underline{0}$ แล้ว เราจะกล่าวว่าเมทริกซ์ B เป็นอินเวอร์ส (Inverse) สำหรับการบวกของเมทริกซ์ A และจะใช้สัญลักษณ์ $-A$ เขียนแทนเมทริกซ์ B ซึ่งทำให้
	$A + B = \underline{0}$ ดังนั้น $A + (-A) = \underline{0}$
	1.2.4 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ (The Scalar Multiplication)
นิยาม 1.7	ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และให้ c เป็นสเกลาร์ใดๆ
Scalar Multiplication	ผลคูณของสเกลาร์ c และเมทริกซ์ A คือ $cA = C = [c_{ij}]_{m \times n}$ โดยที่ $c_{ij} = ca_{ij}$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$
หมายเหตุ	คำว่า “สเกลาร์” ในที่นี้หมายถึงจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ดังนั้น การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ ก็คือ การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนใดๆ นั้นเอง
	จากนิยามจะเห็นว่า การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์คือ การเอาสเกลาร์คูณสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์นั้นนั่นเอง ดังนั้น
	$cA = c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix} = Ac$
	ในการคูณเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ด้วยสเกลาร์ c นั้นอาจเขียนได้ง่ายๆ ว่า $cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$
ข้อสังเกต	$(-1)A = -A$
	1.2.5 การคูณระหว่างเมทริกซ์ (The Multiplication of Matrices)
นิยาม 1.8	ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$ ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B คือ $AB = C = [c_{ij}]_{m \times p}$ โดยที่
Multiplication of Matrix	$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$
	เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, p$

จากนิยามจะเห็นว่าการคูณเมทริกซ์ A ด้วยเมทริกซ์ B นั้น จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของเมทริกซ์ A จะต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ B และผลคูณที่ได้จากการคูณเมทริกซ์ A ด้วยเมทริกซ์ B จะเขียนแทนด้วย AB ดังนั้น เราอาจกล่าวได้ว่า โดยทั่วไปแล้วเมทริกซ์สองเมทริกซ์จะคูณกันได้ ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของเมทริกซ์ที่เป็นตัว

ตั้งจะต้อง เท่ากับ จำนวนแถวของเมทริกซ์ที่เป็นตัวคูณ และถ้าให้ C เป็นผลคูณของเมทริกซ์ A และ B

$$\text{ดังนั้น } AB = C = [c_{ij}]_{m \times p}$$

$$\text{โดยที่ } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

นั่นคือ c_{ij} ซึ่งเป็นสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่ง (i,j) ของเมทริกซ์ A และสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ j ของเมทริกซ์ B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

ในบางครั้งเราอาจเขียนผลคูณของเมทริกซ์ A และ B ในรูปย่อๆ ดังนี้

$$AB = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right]_{m \times p}$$

ตัวอย่าง 1.1

กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

จงหา (1) สมาชิกซึ่งอยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 3 ของ AB

(2) สมาชิกซึ่งอยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 4 ของ AB

วิธีทำ (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \times 4) + (6 \times 3) + (0 \times 5) = 26$$

วิธีทำ (2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & 13 \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \times 3) + (2 \times 1) + (4 \times 2) = 13$$



1.2.6 การทรานสโพสของเมทริกซ์ (The Transpose of a Matrix)

ถ้าเราสลับที่ระหว่างแถวและคอลัมน์ของเมทริกซ์ A ก็จะได้เมทริกซ์ใหม่ ซึ่งเราจะเรียกเมทริกซ์ใหม่นี้ว่า ทรานสโพสของเมทริกซ์ A ดังนั้น เราจึงนิยามทรานสโพสของเมทริกซ์ ดังนี้

นิยาม 1.9

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว

Transpose of a Matrix

ทรานสโพส (Transpose) ของเมทริกซ์ A คือ เมทริกซ์ $A^T = [a_{ji}^T]$ เมื่อ $a_{ji}^T = a_{ij}$

จากนิยามแสดงว่า เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ จะได้ A^T (อ่านว่า A ทรานสโพส หรือ ทรานสโพสของเมทริกซ์ A) เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $n \times m$ และสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่ง (i, j) ของ A^T ก็คือ สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่ง (j, i) ของเมทริกซ์ A นั่นเอง ทรานสโพสของเมทริกซ์ เรียกอีกชื่อว่า เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

ตัวอย่าง 1.2

กำหนดให้ A, B, C, D, E มีขนาด 4×5 , 4×5 , 5×4 , 4×2 และ 5×4 ตามลำดับ จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ในข้อใดมีความหมาย ในกรณีที่มีความหมายจงหาขนาดและจำนวนสมาชิกในเมทริกซ์นั้นด้วย

- (1) BA (2) AC+D (3) E(A+B) (4) $(A^T+E)D$

วิธีทำ (1) $BA = [b_{ij}]_{4 \times 5} [a_{ij}]_{4 \times 5}$

↑ ↑
ไม่เท่ากัน

หา BA ไม่ได้ เนื่องจากจำนวนหลักของตัวตั้งไม่เท่ากับจำนวนแถวของตัวคูณ