

DRIVING RANGE OF CALCULUS

ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์

THEORY AND PROBLEMS

คณิตศาสตร์

วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENTISTS



FREE!
COMPUTER SURFACES
IN 3D

สมการเชิงอนุพันธ์ 1 และการแปลงลาปลาซ

DIFFERENTIAL EQUATIONS 1 AND LAPLACE TRANSFORM

- ☒ สรุปสูตรนิยาม ทฤษฎี และตัวอย่างประกอบ
- ☒ 384 ตัวอย่างโจทย์พร้อมเฉลยโดยละเอียด
- ☒ 1,687 โจทย์ปัญหาพร้อมคำตอบทุกข้อ
- ☒ 360 การคำนวณสมการเชิงอนุพันธ์และการวาดกราฟคำตอบโดย Maple

รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แววจริญ

รองศาสตราจารย์ ดร. ชนศักดิ์ บำยเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ประวัติผู้แต่ง



รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แวเวจริญ



รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

การศึกษา

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.บางเขน
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.พิษณุโลก
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)
- ค.ด. (อุดมศึกษา), Cognate : สถิติ-วิจัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประสบการณ์

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ, ฝ่ายพัฒนา, ฝ่ายกิจการนักศึกษา
- รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

ปัจจุบัน

- ดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ (มจพ.)

ผลงานตำราวิชาการร่วมกัน

- SERIES 1 อนุพันธ์และการประยุกต์
- SERIES 2 อินทิกรัลและการประยุกต์
- SERIES 3 แคลคูลัสหลายตัวแปร
- SERIES 4 การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์

- SERIES 5 สมการเชิงอนุพันธ์ 1
- SERIES 6 สมการเชิงอนุพันธ์ 2 และการแปลงลาปลาซ
- SERIES 7 เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ, 3 มิติ
- SERIES 8 เมตริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น

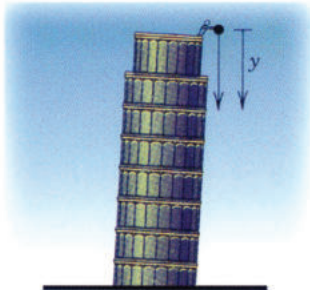
ผลงานวิจัย

- สื่อการเรียนการสอนสำหรับวิชาแคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ใน 3 มิติ
- Computer-assisted instruction (CAI) in Calculus
- สื่อการเรียนการสอนสำหรับ ปริพันธ์ของฟังก์ชัน 1: ความหมายของปริพันธ์จำกัดเขต ปริพันธ์อนันต์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
- Adomian Decomposition Method for Solving a Non-Linear Shallow Water Tsunami Model of Coupled Partial Differential Equations
- Development of a Mathematical Model of the Inshore Tsunami Wave Equations by Lax-Wendroff Numerical Method

- Elliptic Number และเส้นรอบวงของวงรี
- Elliptic Number and Approximation Function
- การทดสอบการรู้เข้าของอนุกรมโดยใช้คอมพิวเตอร์
- The Development of The Prerequisite Model in Basic Mathematics Course for Science and Technology Undergraduate Curricular by Using Concept Maps
- การใช้คอมพิวเตอร์สร้างฟังก์ชันไมโครซอฟท์

การประยุกต์บางเรื่องของสมการเชิงอนุพันธ์

Some Applications of Differential Equations



การหล่นของก้อนหิน

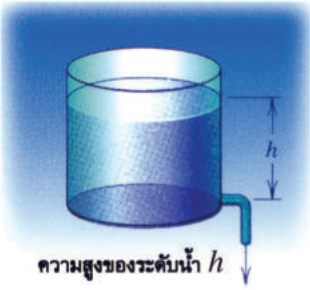
$$y'' = g$$



ความเร็ว
 v

การกระโดดร่ม

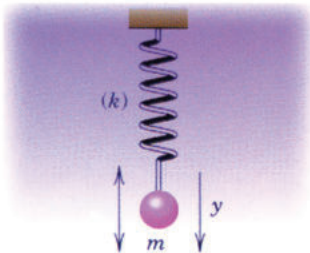
$$mv' = mg - bv^2$$



ความสูงของระดับน้ำ h

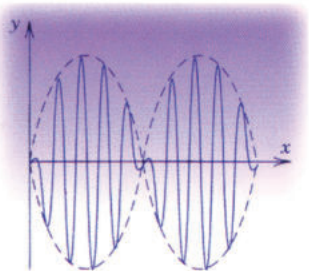
การไหลออกของน้ำ

$$h' = -k\sqrt{h}$$



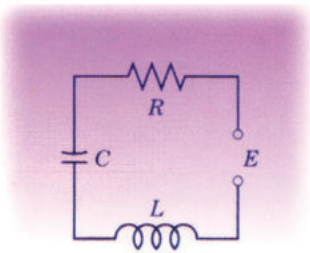
การสั่นของมวลบนสปริง

$$my'' + ky = 0$$



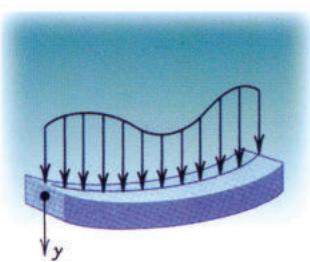
BEATS ของระบบของการสั่น

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos \omega t, \omega_0 \approx \omega$$



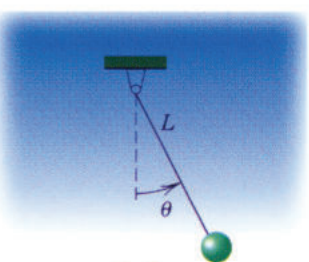
กระแสในวงจร RLC

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'$$



คานที่ผิดปกติ

$$Ely^{IV} = f(x)$$



การเคลื่อนที่ของลูกตุ้ม

$$L'' + g \sin \theta = 0$$

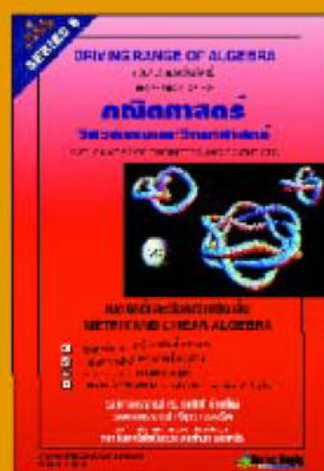
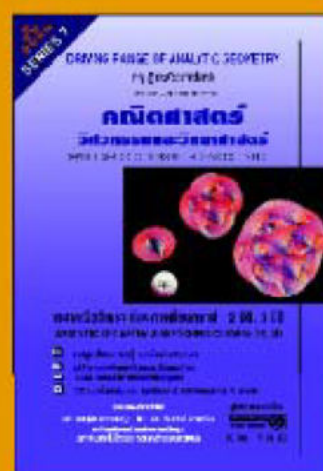
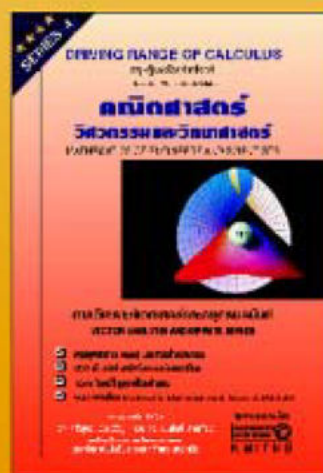
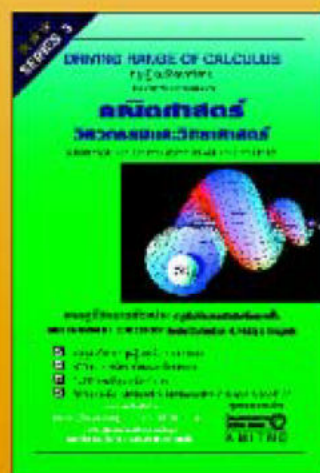
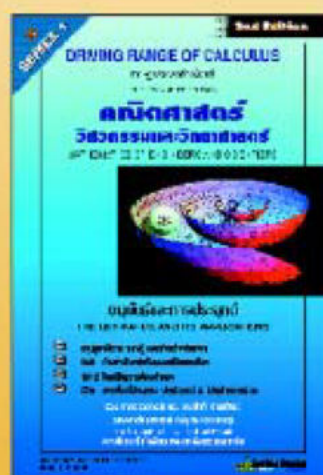
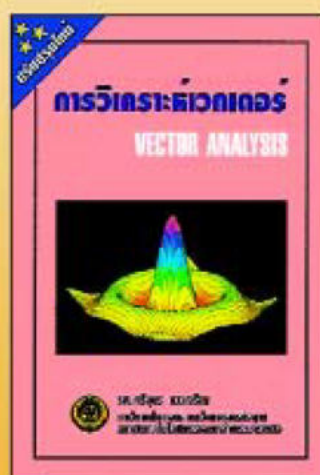


โมเดลของการล่าเหยื่อ

$$y_1' = ay_1 - by_1y_2$$

$$y_2' = ky_1y_2 - ly_2$$

ผลงานของอาจารย์ผู้เขียนทั้งสองท่าน



SERIES 1, 2, 3 และ 7 เหมาะสำหรับนิสิต นักศึกษา ปีที่ 1
SERIES 4, 5, 6 และ 8 เหมาะสำหรับนิสิต นักศึกษา ปีที่ 2

ISBN : 978-616-590-460-5

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย ตาม พ.ร.บ. ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2521
ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากที่ได้รับอนุญาต

<http://www.kmutnb.ac.th>



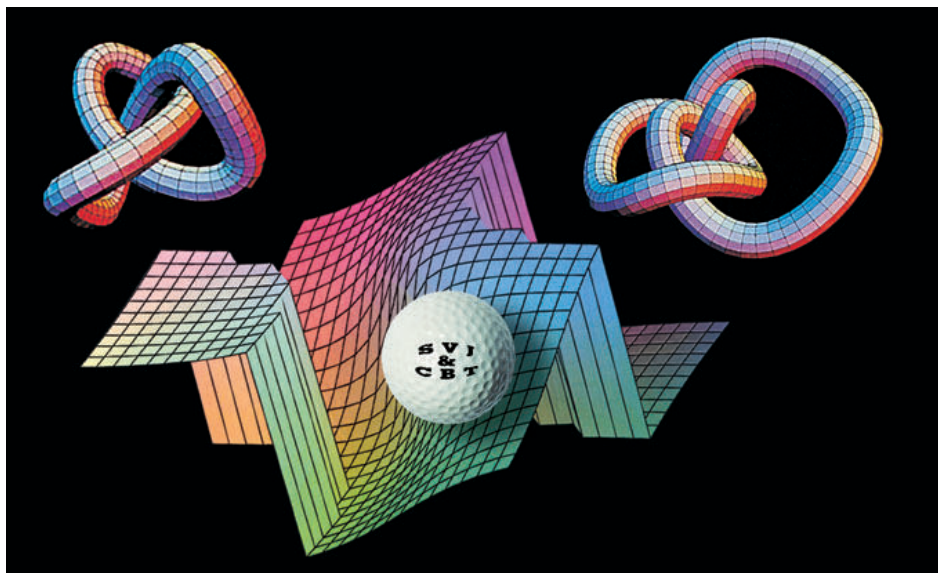
สนนการซื้อฉบับนี้ 1

299.- (7.99 \$)

$$-\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์
MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENTISTS

สมการเชิงอนุพันธ์ 1 และการแปลงลาปลาซ
DIFFERENTIAL EQUATION 1 AND LAPLACE TRANSFORM



รศ. ศรีบุตร แวเจริญ

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ราคา 299 บาท (7.99 USD)

คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

MATHEMATICS OF ENGINEER AND SCIENTISTS

อนุพันธ์เชิงอนุพันธ์ 1 และการแปลงลาปลาซ

DIFFERENTIAL EQUATIONS 1 AND LAPLACE TRANSFORM

Differential Equations 1 : e-book:Series 5

ISBN 974-974-06-8945-4 สำหรับหนังสือ Series 5

ISBN (e-book) 978-616-590-460-5 สำหรับ e-book : Series 5

อนุพันธ์เชิงอนุพันธ์ 1 และการแปลงลาปลาซ

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย พ.ร.บ.ลิขสิทธิ์ พศ. 2521

ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

วันวางจำหน่าย : 20-04-2022

ขนาดไฟล์ : 71.9 MB

จำนวนหน้า : 642 หน้า

ประเทศ : THAILAND

ประเภทไฟล์ : PDF

ภาษา : Thai

ออกแบบปกและ Artwork ทินพัฒน์ แวเจริญ ภาควิชาสถิติประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

จัดทำโดย

รศ.ศรีบุตร แวเจริญ และ รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

ชื่อหนังสือ e-book:Series 5 เล่มนี้

ราคา 299 บาท (7.99 USD)

การสั่งซื้อ ebook series 5 สามารถติดต่อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาทุกสาขา

รศ. ศรีบุตร แวเจริญ

Tel. 081-904-1608

ID Line sribudh

E-mail : swr@kmitnb.ac.th

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

Tel. 081-908-5090

ID Line mala0928

E-mail : chanasak.b@op.kmitnb.ac.th

คำนำ

การเรียนรู้แคลคูลัสกับการเล่นกีฬามีลักษณะคล้ายกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งกีฬากอล์ฟ ซึ่งในปัจจุบัน “ไทเกอร์ วูดส์” นักกอล์ฟสายเลือดลูกครึ่ง ไทย-อเมริกัน ดังระเบิดไปทั่วโลก ด้วยประวัติการเรียนและกีฬากอล์ฟอันเยี่ยมยอด เป็นแชมป์กอล์ฟเยาวชนของสหรัฐอเมริกาหลายสมัย หลังการก้าวเข้าสู่กอล์ฟอาชีพเพียงเวลาไม่กี่เดือน ก็สามารถคว้าแชมป์กอล์ฟรายการใหญ่ได้หลายรายการ ด้วยวัยเพียง 21 ปี ด้านการเรียน มีผลการเรียนดีเยี่ยมสามารถเข้าเรียนในมหาวิทยาลัย ซึ่งเป็นมหาวิทยาลัยที่อุปแทนของสหรัฐ ผู้เขียนอยากนำทั้งสองสิ่งมาหล่อหลอมเข้าด้วยกัน เพื่อให้ นิสิต นักศึกษา และผู้สนใจในวิชาแคลคูลัสได้มองภาพในอนาคตได้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้น โดยนำกีฬากอล์ฟมาอธิบายเปรียบเทียบ หนังสือเล่มนี้ได้ตั้งชื่อว่า **สนามฝึกซ้อมวิชาแคลคูลัส (Driving Range of Calculus)** เช่นเดียวกับกีฬากอล์ฟซึ่งมี **สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ (Driving Range of Golf)** ก่อนที่จะเข้าสนามฝึกซ้อมคงต้องศึกษานิยามทฤษฎี และคุณสมบัติต่าง ๆ จากห้องเรียนจนเข้าใจดีพอ แล้วจึงนำหนังสือเล่มนี้มาฝึกฝนให้เกิดความเข้าใจให้ดียิ่งขึ้น

หนังสือเล่มนี้ได้ใช้เทคโนโลยีสมัยใหม่มาช่วย ทำให้รูปแบบของหนังสือมีคุณค่ายิ่งขึ้นโดยใช้โปรแกรม **Equations บน Microsoft Windows P** โดยเฉพาะการเขียนกราฟโดยโปรแกรม **Mathcad 12** และ **Maple 9.5** และการคำนวณค่าอินทิกรัลโดยใช้โปรแกรม **Maple** ซึ่งทำให้ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ สามารถมองเห็นโจทย์ปัญหานั้น ๆ ได้เป็นรูปธรรม และได้มองเห็นวิวัฒนาการความก้าวหน้าของซอฟต์แวร์ทางด้านคณิตศาสตร์

แคลคูลัสเป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งของสาขาคณิตศาสตร์ และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาไปใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาต่าง ๆ ของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ใช้ได้ดี นิสิต นักศึกษา จำเป็นต้องศึกษาวิชาพื้นฐานให้เข้าใจถ่องแท้ก่อน จากประสบการณ์ด้านการสอนมาเกือบ 20 ปี ในสถาบันแห่งนี้ และเป็นอาจารย์พิเศษมหาวิทยาลัยอีกหลายแห่ง จึงได้รวบรวมเขียนออกมาเป็นแผนที่วิชา **แคลคูลัสพื้นฐาน (Calculus Concept Maps)** ตามที่นำเสนอในปกหลังด้านในของหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น SERIES ทั้งหมด 8 SERIES โดยแต่ละ SERIES จะมีความสัมพันธ์กันเกี่ยวข้องกันอยู่ตลอดเวลา โดยเฉพาะ SERIES 5 นี้ ผู้อ่านควรจะศึกษาเนื้อหาใน SERIES 1 (อนุพันธ์และการประยุกต์) SERIES 2 (อินทิกรัลและการประยุกต์) และ SERIES 3 (แคลคูลัสหลายตัวแปร) ให้เข้าใจก่อน

ทางด้านกีฬากอล์ฟนั้นเราแบ่งโฟร์ออกเป็น 3 โฟร์ เรียงลำดับตามความสามารถได้ดังนี้ คือ **โฟร์ C มือใหม่ (Beginner)** , **โฟร์ B มือสมัครเล่น (Amateur)** , **โฟร์ A มืออาชีพ (Professional)** การเล่นกอล์ฟนั้นต้องใช้ความอดทน ความพยายาม มีจิตใจที่มุ่งมั่น การเล่นกอล์ฟจะต้องแก้ปัญหาเฉพาะหน้าตลอดเวลา รูปแบบของปัญหานั้นมีการเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ ผู้เล่นต้องคิดแก้ปัญหาด้วยตัวเองบนพื้นฐานของประสบการณ์ที่มีอยู่ เมื่อถึงจุดหนึ่งผู้เล่นที่มีพื้นฐานและการฝึกซ้อมดีพอ จึงจะสามารถแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้เสมอ โดยที่ผู้เล่นจะต้องนำปัจจัยหลาย ๆ อย่างมาช่วยในการคิดแก้ปัญหา

ในวิชาแคลคูลัสก็เช่นเดียวกัน เป็นวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์หลาย ๆ ด้านมาประกอบกันเพื่อช่วยในการคิดแก้ปัญหา นักศึกษาที่มีพื้นฐานยังไม่ดีพอจึงเปรียบเสมือนนักกอล์ฟมือใหม่ต้องฝึกทำโจทย์ตั้งแต่ต้นในเรื่องที่เป็นพื้นฐานจนเกิดความเข้าใจก่อน จึงจะเริ่มศึกษาในเนื้อหาของวิชาแคลคูลัสได้ เมื่อผู้เรียนฝึกซ้อมจนเข้าใจแล้วจึงจะถือว่าอยู่ในระดับมือสมัครเล่น และนักศึกษาจะต้องทำการฝึกฝนต่อไปอีกจนเกิดความเข้าใจ จึงจะถือว่านักศึกษาจัดอยู่ในชั้น ระดับมืออาชีพ ซึ่งจะสามารถศึกษาในชั้นประยุกต์ได้ ในตำราชุดนี้เปรียบเสมือนสนามฝึกซ้อม มีโจทย์ตัวอย่างมากมายเพียงพอที่จะทำให้นักศึกษาพัฒนาตนเองอยู่ในชั้นมืออาชีพได้อย่างสบาย

ในหนังสือประกอบการเรียน SERIES 5 เล่มนี้ ได้รวบรวมสรุปนิยาม, ทฤษฎี และโจทย์ตัวอย่างประกอบกว่า 286 ข้อ และมีรูปภาพต่าง ๆ ทั้งใน 2 มิติ และรูปภาพของฟังก์ชัน ซึ่งเขียนโดยโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ประกอบโจทย์ปัญหาอีกกว่า 123 รูป นอกจากนี้ผู้เขียนยังได้รวบรวมโจทย์ปัญหาอีกกว่า 1,150 ข้อ ไว้ในนิสิต นักศึกษา ได้ฝึกทบทวนเนื้อหา และทดลองทำแบบฝึกหัด อันจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนได้เป็นอย่างดี ถ้าจะให้หนังสือเล่มนี้เปรียบเทียบกับกีฬากอล์ฟ ผู้เขียนตั้งใจจะให้เป็นอย่างเดียวกับสนามฝึกซ้อมกอล์ฟ (Driving Range) ถ้าใครเข้าสนามฝึกซ้อมมากก็จะทำให้พัฒนาฝีมือได้ดียิ่งขึ้น ในทำนองเดียวกันถ้าผู้อ่านมันฝึกซ้อมบนสนามฝึกซ้อม SERIES 5 นี้ ก็จะส่งผลให้นิสิตและนักศึกษาเข้าสอบกลางภาค (Midterm) และสอบปลายภาค (Final) ด้วยความมั่นใจ เช่นเดียวกับนักกอล์ฟที่มีความพร้อมและมีความเชื่อมั่นเมื่อลงสนามแข่งขันและได้รับรางวัลให้กับตนเองในที่สุด

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณคุณครูทุกท่าน ตั้งแต่ระดับประถมจนถึงระดับมหาวิทยาลัย ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้ และขอกราบขอบคุณทุกท่าน ที่ได้ให้การสนับสนุนหนังสือ SERIES 1 SERIES 2 SERIES 3 และ SERIES 4 ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานทุกคนที่คอยให้การสนับสนุนและให้กำลังใจมาโดยตลอด และขอขอบคุณ คุณวีณา เนตรสว่าง ที่ทุ่มเทช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดี และที่สำคัญที่สุดขอขอบคุณภรรยาและลูก ๆ ของผู้เขียนทั้งสอง: คุณยุพิน แวเจริญ ลูกแพรวไพลินและลูกทินพัฒน์ คุณวษัเดือน บ่ายเที่ยง ลูกตัมและลูกดี ที่ได้ให้กำลังใจในการเขียนมาโดยตลอดและเป็นผู้ที่อยู่เบื้องหลังความสำเร็จในการเขียนตำราทั้ง 8 เล่ม

หนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 5 ฉบับปรับปรุงครั้งที่ 2 เล่มนี้ ได้ทำการปรับปรุงจากหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 5 สมการเชิงอนุพันธ์ 1 จากการจัดพิมพ์ครั้งแรกในปี 2542 หลาย ๆ ด้านค่อนข้างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ได้นำเรื่อง การแปลงลาปลาซ (Laplace Transformation) จากหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 6 นำมาใส่เพิ่มเติม อีกหนึ่งหัวข้อ เพื่อให้ครอบคลุมเนื้อหาในวิชา สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือมหาวิทยาลัย และมหาวิทยาลัยต่าง ๆ มากยิ่งขึ้น นอกจากนี้ได้ใช้โปรแกรม Maple 11 และโปรแกรม Mathcad 14 ที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย ในกลุ่มของนักคณิตศาสตร์ ในการทำกราฟต่าง ๆ โดย 360 กราฟของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ และสนามทิศทางของสมการเชิงอนุพันธ์ และกราฟของฟังก์ชันต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง พร้อมกันนี้ผู้เขียนยังได้มีการเพิ่มเติมบทพิสูจน์ของทฤษฎีต่าง ๆ ในบทต่าง ๆ ทั้ง 5 บท และได้เพิ่มตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และสนามแสดงทิศทางของคำตอบ ในบทที่ 1 และบทที่ 2 ได้มีการเพิ่มตัวอย่างโจทย์ และโจทย์ปัญหาอีกมากมาย ในบทที่ 4 ได้เพิ่มเติมวิธีการลดรูปให้สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เขียนในรูปของสมการเชิง

อนุพันธ์ นอกจากนี้ผู้เขียนได้เพิ่มตัวอย่างแสดงวิธีทำโดยละเอียดที่น่าสนใจจากเดิม 286 ตัวอย่างโจทย์เป็น 384 ตัวอย่าง และเพิ่มโจทย์ปัญหาพร้อมคำตอบ จากเดิม 1,150 ข้อ เพิ่มเป็น 1687 ข้อ และใช้โปรแกรม Maple เขียนกราฟจากเดิม 123 กราฟ เป็น 360 กราฟ และแสดงขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์และการวาดกราฟโดย Maple เพื่อให้ผู้ศึกษาได้เห็นรูปธรรมนามธรรมยิ่งขึ้น และเกิดความเข้าใจลึกซึ้ง โดยดูจากกราฟของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ จากการเพิ่มข้อมูลต่าง ๆ ทำให้จำนวนหน้าเพิ่มขึ้นอีกมากกว่าเดิม 450 หน้า เป็น 632 หน้า

ผู้เขียนขอกราบขอบคุณ คุณครู-อาจารย์ทุกท่าน ตั้งแต่ประถมจนถึงมหาวิทยาลัยที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้ ขอกราบขอบคุณทุกท่านนี้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งท่านอธิการบดี ผศ.ปรีชา อ่องอารี ที่ให้เกียรติให้ คำนิยมในหนังสือ **e-book:Series 5** และให้การสนับสนุนหนังสือตั้งแต่ **e-book:Series 1** ถึง **e-book:Series 8** และ รศ.ดร.เสนอ คุณประเสริฐ ที่ช่วยให้คำแนะนำการใช้โปรแกรม Maple หนังสือ **e-book:Series 5** สมการเชิงอนุพันธ์และการแปลงลาปลาซ ปรับปรุงใหม่เล่มนี้จะไม่สามรถเกิดขึ้นได้ ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานทุกคนที่ได้คอยให้กำลังใจและให้คำแนะนำด้วยดีมาตลอด ขอขอบคุณ คุณฉัตรสุมาลย์ ลากเวณี ที่ทุ่มเทช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดีและขอบคุณนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้ช่วยตรวจต้นฉบับให้เป็นอย่างดี และที่สำคัญที่สุดขอขอบคุณและขอบใจ ภรรยา และลูกๆ ของผู้เขียนทั้งสอง : คุณยุพิน แววจริญ ลูกแพรวและลูกเพชร คุณวงศ์เดือน บ่ายเที่ยง ลูกต๋มและลูกต๊ ที่ได้ให้กำลังใจในการเขียนมาตลอดและเป็นผู้อยู่เบื้องหลังของความสำเร็จในการจัดทำ นี้

หนังสือ **e-book:Series 5** สมการเชิงอนุพันธ์ 1 และการแปลงลาปลาซ ปรับปรุงเป็น **e-book:Series 5** ใหม่เล่มนี้จะไม่สามรถเกิดขึ้นได้ ถ้าไม่มีทีมงานบุคลากรของคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ในภาควิชาคณิตศาสตร์และนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์ทั้งในอดีตและปัจจุบัน ดังเช่น นส.อุมารัตน เทพี (MA12) ที่ช่วยพิมพ์ต้นฉบับและช่วยคำนวณคำตอบและวาดกราฟของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยโปรแกรม Maple นายเวคิน พุฒิธีระโชติ (MA14) ที่ช่วยตรวจต้นฉบับอย่างละเอียดทุกบท นส. บุปผา จิตรโสม (MA20) ที่ทุ่มเทเวลาช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดียิ่ง ท้ายสุดนี้ขอขอบใจ นายทินพัฒน์ แววจริญ (AS 23) ของ มจพ. (KMUTNB) ที่ช่วยออกแบบปก และ Artwork ของ **e-book:Series 5** เล่มนี้ทั้งหมด

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือประกอบการเรียนเล่มนี้ คงจะเป็นประโยชน์ต่อนิสิต นักศึกษา ในสถาบันอุดมศึกษาต่างๆ บ้างตามสมควร หากพบข้อบกพร่องที่ควรแก้ไขในหนังสือเล่มนี้ กรุณาเสนอแนะให้ผู้เขียนทราบด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง ขอให้แฟนพันธ์แท้และผู้สนใจคอยติดตาม **e-book:Series 6** ต่อไป

คุณความดีและคุณประโยชน์ทั้งหลายทั้งปวง ขอมอบให้บิดา – มารดา ครู-อาจารย์ ของผู้เขียนทั้งสอง

รศ. ตรีบุตร แววจริญ

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

คำนิยม

ท่านผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ทุกท่าน ผมได้ติดตามวิธีคิดและการทำ Series Books ของอาจารย์ทั้งสองท่าน คือ รศ. ศรีบุตร แววจริญ และ รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง มาโดยตลอด ซึ่งได้จัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ SERIES ออกมาแล้ว 8 เล่มรวมทั้งปรับปรุงคณิตศาสตร์ SERIES 1 SERIES 2 และ SERIES 3 ไปเป็น e-book Series 1 e-book Series 2 และ e-book Series 3 เรียบร้อยและสามารถสั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาได้ทุกสาขา หนังสือคณิตศาสตร์ Series 5 เล่มนี้ก็เช่นกันผู้เขียนหนังสือทั้งสองท่านก็ได้ปรับปรุงเนื้อหาใหม่ในหนังสือให้ดียิ่งขึ้นและทำเป็น e-book Series 5 โดยมีการนำเอาโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Maple และ Mathcad มาช่วยในการวาดกราฟรูป4สี และหาคำตอบของปัญหาตัวอย่างให้การเรียนวิชาคณิตศาสตร์สามารถทำความเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น และสามารถตรวจสอบความถูกต้องของการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์และการวาดกราฟ4สีของคำตอบโดยโปรแกรม Maple ซึ่งเป็นโปรแกรมที่นักคณิตศาสตร์นิยมใช้กันทั่วโลก ผมเองตอนที่เป็นักเรียน-นักศึกษาเวลาทำการบ้านคณิตศาสตร์ต้องหาให้ได้คำตอบและต้องถูกต้องแต่มั่นใจว่าคำตอบที่ถูกต้องนั้นในสมัยก่อน ต้องตรวจสอบที่ท้ายเล่มเท่านั้น

ในปัจจุบันวิวัฒนาการทางคอมพิวเตอร์มีมากขึ้น ท่านอาจารย์ทั้งสองท่านก็ยินยอมให้การเรียนรู้ด้านคณิตศาสตร์เป็นแบบเดิมหรือย้ายอยู่กับที่ ได้พัฒนาการเรียนรู้โดยการนำโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแสดงวิธีทำและหาคำตอบ และได้สอดแทรกการเขียนคำสั่งโดยโปรแกรมสำเร็จรูป Maple ในหนังสือเล่มนี้ไว้เป็นจำนวนมากด้วย เพื่อให้ผู้อ่านได้ศึกษาโปรแกรม Maple ไปด้วย

ผมเองได้เห็น ความบากบั่น ความพยายามของอาจารย์ทั้งสองท่าน ที่พยายามช่วยให้การเรียนคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่ไม่ยุ่งยากอีกต่อไป และในฐานะของผู้บริหารคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ต้องขอขอบคุณและ อยากให้มีหนังสือแบบนี้มากขึ้นในหลายสาขาวิชาของคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์เพื่อให้นักเรียนในวิชาของคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์สามารถทำให้นักศึกษาหรือผู้อ่านได้เข้าใจในเนื้อหาของวิชานั้นอย่างดี



รองศาสตราจารย์ ดร. วิตนนต์ จารุโรจน์กิริติ
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

แถมฟรี

e-book:Series 5 เล่มนี้ ผู้เขียนได้มอบแผ่นพับขนาด A3 รูป4สีสวยงามจำนวน

2 แผ่นที่จะเป็นประโยชน์กับนักศึกษาและผู้สนใจวิชา CALCULAS เป็นอย่างดี

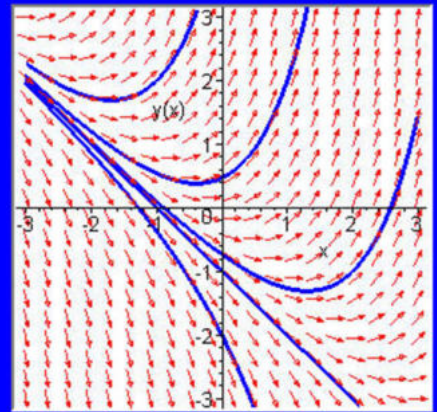
1. CALCULUS CONCEPT MAPS

**2. FORMULA TABLES OF DERIVATIVES AND
INTEGRALS**

สารบัญ

บทที่ 1

สมการเชิงอนุพันธ์และคำตอบ (Differential Equation and Their Solution)



1.1	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model)	1 - 3
1.2	การจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์	4 -11
1.3	คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น	12-13
1.4	ปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและปัญหาเงื่อนไขค่าขอบเขต (Initial-Value Problems and Boundary-Value Problems)	14-18
1.5	การมีจริงและความเป็นไปได้เพียงอย่างเดียวของคำตอบ (Existence and Uniqueness of Solution)	19-22
1.6	สนามแสดงทิศทาง (Directional Fields)	23-32

บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Differential Equations)



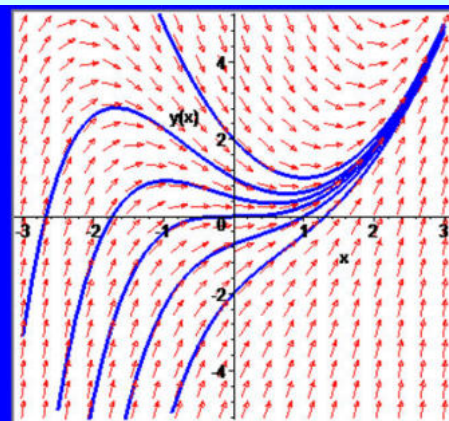
2.1	สมการแบบแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)	33-46
2.2	สมการแม่นตรง (Exact Equations)	47-73
2.3	ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต (Integrating Factors)	74-89
2.4	สมการเชิงเส้น (Linear Equations)	90-114

2.5 สมการเอกพันธ์ (Homogeneous Equations)	115-130
2.6 สมการที่แปลงรูปเป็นสมการเอกพันธ์ (Reduce to Homogeneous Equations)	131-142
2.7 สมการแบร์นูลลี และริคคาตี (Bernoulli Equations and Riccati Equations)	143-164
2.8 การแก้สมการโดยการแทนค่า (Substitution Method)	165-172
2.9 สมการอันดับสองที่หาคำตอบได้โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่ง	173-180

บทที่ 3

การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

(Applications of Ordinary Differential Equation)



3.1 ปัญหาการหาประจุไฟฟ้าและกระแสในวงจรไฟฟ้า (Application of Electric Circuits)	181-194
3.2 การประยุกต์ในทางกลศาสตร์ (Application of Mechanics)	195-218
3.3 การไหลของความร้อนในภาวะสม่ำเสมอ (The Steady - State Heat Flow)	219-222
3.4 การประยุกต์อื่นๆ ได้แก่ การเพิ่มของประชากร ดอกเบี้ย ปฏิกิริยาเคมี เป็นต้น	219-222
3.5 แนววิถีเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Trajectories)	223-255

บทที่ 4

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n (Differential Equation of Order n)



4.1 ทฤษฎีเบื้องต้นของสมการเชิงเส้น	256-287
4.2 การลดทอนอันดับของสมการเชิงเส้นอันดับสอง (Reduction of Order)	288-298
4.3 สมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (Homogeneous Linear Equation with Constant)	299-323

4.4	การหาคำตอบเฉพาะของสมการเชิงเส้นที่ไม่เอกพันธ์	
4.4.1	การหาคำตอบเฉพาะโดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (The Method of Undetermined Coefficients)	324-346
4.4.2	การหาคำตอบเฉพาะโดยวิธีใช้ตัวลบล้าง (Annihilate)	347-363
4.4.3	การหาคำตอบเฉพาะโดยระเบียบวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์ (The Method of Variation of Parameters)	364-391
4.4.4	การหาคำตอบเฉพาะโดยระเบียบวิธีตัวดำเนินการผกผัน (The Method of Inverse Operator)	392-420
4.5	สมการโคชี-ออยเลอร์ (Cauchy – Euler Equation)	421-438
4.6	การแก้ระบบสมการเชิงเส้น (Systems of Linear Equations)	439-444
4.7	สมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear Equations)	445-449
บทที่ 5 การแปลงลาปลาซ (Laplace Transformation) 		
5.1	บทนิยามของผลการแปลงลาปลาซ (The Laplace Transform)	450-473
5.2	ฟังก์ชันแกมมา (Gamma Function)	474-483
5.3	การแปลงลาปลาซผกผัน และการแปลงของอนุพันธ์ (Inverse Laplace Transform and Transform of Derivatives)	484-502
5.4	คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ (Properties of Laplace Transform)	503-521
5.5	ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (Unit Step Function)	522-546
5.6	การแปลงของฟังก์ชันคาบ (Transforms of Periodic Function)	547-556
5.7	ผลการประสาน (Convolution)	557-579
5.8	การดล และฟังก์ชันดิแรกเดลต้า (Impulse and Dirac's Delta Function)	580-596
เฉลยแบบฝึกหัด (Solution)		597-616
ภาคผนวก (Appendices) สรุปสูตรอนุพันธ์ อินทิเกรต		617-621
D-Operator Short Method และ Laplace Transforms		
บรรณานุกรม		622

สารบัญ e-book Series 1 – Series 8

สารบัญ Series 1 อนุพันธ์และการประยุกต์

- บทที่ 1 บทนำ
- บทที่ 2 ลิมิตและความต่อเนื่อง
- บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- บทที่ 4 การประยุกต์ของอนุพันธ์

สารบัญ Series 2 อินทิกรัลและการประยุกต์

- บทที่ 1 บทนิยามและสูตรของการอินทิเกรต
- บทที่ 2 เทคนิคของการอินทิเกรต
- บทที่ 3 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ
- บทที่ 4 การประยุกต์ของอินทิเกรต
- บทที่ 5 การอินทิเกรตเชิงตัวเลขและโดย CAS

สารบัญ Series3 แคลคูลัสหลายตัวแปร

- บทที่ 1 พื้นผิวโค้ง
- บทที่ 2 อนุพันธ์ย่อยและการประยุกต์
- บทที่ 3 อินทิกรัลหลายชั้นและการประยุกต์

สารบัญ Series 4 การวิเคราะห์เวกเตอร์

- บทที่ 1 อนุกรมอนันต์
- บทที่ 2 อนุกรมยกกำลัง
- บทที่ 3 เวกเตอร์ใน 2 มิติ และ 3 มิติ
- บทที่ 4 เวกเตอร์แคลคูลัส
- บทที่ 5 อินทิกรัลเชิงผิวโค้ง

สารบัญ Series 5

สมการเชิงอนุพันธ์ 1 และการแปลงลาปลาซ

- บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์และคำตอบ
- บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
- บทที่ 3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n
- บทที่ 4 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
- บทที่ 5 การแปลงลาปลาซ

สารบัญ Series 6

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและอนุกรมฟูเรียร์

- บทที่ 1 การหาคำตอบในรูปอนุกรมของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น
- บทที่ 2 การแปลงลาปลาซ
- บทที่ 3 การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง
- บทที่ 4 อนุกรมฟูเรียร์
- บทที่ 5 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

สารบัญ Series 7

เรขาคณิตวิเคราะห์และการวาดกราฟ 2 และ 3 มิติ

- บทที่ 1 แนวความคิดเบื้องต้น
- บทที่ 2 เส้นตรงและวงกลม
- บทที่ 3 ภาคตัดกรวย
- บทที่ 4 การทำให้ง่ายลงของสมการ
- บทที่ 5 พิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม
- บทที่ 6 จุดในปริภูมิ 3 มิติ
- บทที่ 7 ระนาบในปริภูมิ 3 มิติ
- บทที่ 8 พื้นผิวกำลังสอง

สารบัญ Series พีชคณิตเชิงเส้น

- บทที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้นและเมตริกซ์
- บทที่ 2 ดีเทอร์มิแนนต์
- บทที่ 3 เมตริกซ์ผกผัน
- บทที่ 4 การหาคำตอบของระบบของสมการเชิงเส้น
- บทที่ 5 เวกเตอร์ในระนาบ และปริภูมิ 3 มิติ
- บทที่ 6 ปริภูมิเวกเตอร์
- บทที่ 7 ปริภูมิผลคูณภายใน
- บทที่ 8 ค่าไอเก้นและไอเก้นเวกเตอร์
- บทที่ 9 การแปลงเชิงเส้น
- บทที่ 10 การประยุกต์กับรูปแบบกำลังสอง

บทที่ 1

บทนำ

(Introduction)



1.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model)

มีหลักการหรือกฎเกณฑ์มากมายในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ที่เกิดจากสมบัติทางธรรมชาติในโลกนี้ สามารถกล่าวหรือแสดงความสัมพันธ์ในรูปอัตรา (Rate) ที่สิ่งเหล่านั้นเกิดขึ้นซึ่งเมื่อเขียนในรูปแบบทางคณิตศาสตร์แล้ว ความสัมพันธ์ของสองสิ่งใด ๆ ก็กลายเป็นสมการ และอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งนั้น ๆ ก็คืออนุพันธ์ เราเรียกสมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) เช่น

1. ปัญหาการหาประจุและกระแสในวงจรไฟฟ้า
2. ปัญหาการนำความร้อนในแท่งโลหะหรือแผ่นโลหะ
3. ปัญหาการสั่นของเส้นลวดหรือวัสดุแผ่นบาง ๆ
4. ปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุในลักษณะโปรเจกไทล์ จรวด ดาวเทียม
5. ปัญหาเกี่ยวกับการสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสีหรือการเจริญเติบโตของประชากร
6. ปัญหาเกี่ยวกับปฏิกิริยาทางเคมี
7. ปัญหาเกี่ยวกับการสั่นของคานที่มีลักษณะยืดหยุ่น
8. ปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุผูกติดแน่นกับลวดสปริง เป็นต้น

ปัญหาที่กล่าวมานี้สามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ ข้อสังเกตที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือสมการเชิงอนุพันธ์เกิดขึ้นในหลากหลายสาขาความรู้ ไม่เฉพาะในวิทยาศาสตร์หรือวิศวกรรมศาสตร์เท่านั้น แต่อาจจะพบในการศึกษาทางเศรษฐศาสตร์ ธุรกิจการแพทย์ จิตวิทยา และการวิจัยการดำเนินงาน เป็นต้น

การศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์อย่างเป็นทางการครั้งแรกเริ่มจากนักวิทยาศาสตร์ชาวอังกฤษ เซอร์ ไอแซก นิวตัน (Sir Isaac Newton: ค.ศ. 1642–1727) ซึ่งเป็นผู้ให้กำเนิดวิชาแคลคูลัส และ นักวิทยาศาสตร์ชาวเยอรมัน กอทท์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิทซ์ (Gottfried Wilhelm Leibnitz : ค.ศ. 1646–1716) และมีหลายระเบียบวิธีในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกิดจากนักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่และมีชื่อเสียงมากที่สุด

1.4 ปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและปัญหาเงื่อนไขค่าขอบเขต (Initial-Value Problems and Boundary-Value Problems)

ในการประยุกต์ทางวิทยาศาสตร์หรือวิศวกรรมศาสตร์ไม่เพียงแต่กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์มาให้หาคำตอบเท่านั้น แต่บางปัญหายังอาจจะกำหนดเงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไขหรือมากกว่าที่ต้องสอดคล้องกับคำตอบมาให้ด้วย ตัวอย่างเช่น เราต้องการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 3x^2 + 2$ เราแก้สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2 \quad \text{โดยการหาปริพันธ์ จะได้}$$

$$y(x) = x^3 + 2x + C$$

ซึ่งคำตอบดังกล่าว คือ คำตอบทั่วไปเพราะเกี่ยวข้องกับค่าคงที่ และคำตอบทั้งหมดได้จากคำตอบดังกล่าวหรือถ้าเราต้องการคำตอบที่สอดคล้องกับจุด $(1, 2)$ เราจะต้องหาคำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเสริม (Auxiliary Condition) $y(1) = 2$ โดยการแทนค่า $x = 1, y = 2$

ในคำตอบทั่วไป $y(x) = x^3 + 2x + C$

จะได้ $y(1) = (1)^3 + 2(1) + C$ หรือ $2 = 1 + 2 + C$ ดังนั้น $C = -1$

นั่นคือ สมาชิกของวงศ์ของคำตอบ (Family of Solutions) $y(x) = x^3 + 2x + C$ ที่สอดคล้องกับ $y(1) = 2$ คือ

$$y(x) = x^3 + 2x - 1 \quad \text{เป็นคำตอบเฉพาะ}$$

รูป 1.3 แสดงกราฟของ $y(x) = x^3 + 2x + C$ สำหรับค่า C ต่าง ๆ กัน

และแสดงกราฟของ $y(x) = x^3 + 2x - 1$

การคำนวณปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและการวาดกราฟของคำตอบที่ผ่านจุด(1,2)โดย Maple

```
Chap 1qul_2.mws - [Server 1]
[ > restart:with(DEtools):
> eq1_2:=diff(y(x),x)=(3*x^2)+2;

      eq1_2 :=  $\frac{d}{dx}y(x) = 3x^2 + 2$ 

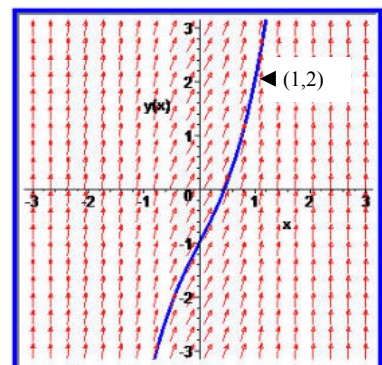
> dsolve(eq1_2,y(x));

      y(x) =  $x^3 + 2x + _C1$ 

> dsolve({eq1_2,y(1)=2},y(x));

      y(x) =  $x^3 + 2x - 1$ 

> DEplot(eq1_2,y(x),x=-3..3,y(x)=-3..3,{y(1)=2},arrows=medium,
linecolor=blue);
```



เส้นโค้งคำตอบของ $y(x) = x^3 + 2x + C$ และ $y(x) = x^3 + 2x - 1$ รูป 1.3

ตัวอย่าง 1.8

First – Order
IVPs

จงแสดงว่า $y = ce^x$ เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัวของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $\frac{dy}{dx} = y$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$ และ จงหาคำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของ ก. $\frac{dy}{dx} = y$, $y(0) = 3$ ข. $\frac{dy}{dx} = y$, $y(1) = -2$

วิธีทำ จาก $y = ce^x$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = ce^x = y$ ดังนั้น $y = ce^x$ เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัวของ $\frac{dy}{dx} = y$

ก. กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 3$ แทน $x = 0$, $y = 3$

ในสมการ $y = ce^x$ ได้ $3 = ce^0 = c$

แทน $c = 3$ ในสมการ $y = ce^x$ จะได้ $y = 3e^x$

เป็นคำตอบปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $\frac{dy}{dx} = y$, $y(0) = 3$

มีกราฟดังแสดงในรูป 1.4

ข. กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = -2$ แทน $x = 1$, $y = -2$

ในคำตอบทั่วไป จะได้ $-2 = ce$ หรือ $c = -2e^{-1}$

ดังนั้น $y = (-2e^{-1})e^x = -2e^{x-1}$ เป็นคำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$\frac{dy}{dx} = y$, $y(1) = -2$ กราฟของคำตอบแสดงดังรูป 1.4



การคำนวณปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและกราฟของคำตอบที่ผ่านจุด (0,3) และจุด (1,-2) โดย Maple

```
Chap 1: 1.1_3.mws - [Server 1]
[ > restart:with(DEtools):
> eq1_9:=diff(y(x),x)=y(x);

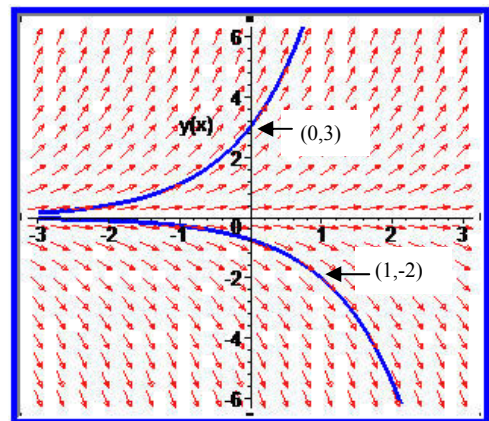
      eq1_9 :=  $\frac{d}{dx}y(x) = y(x)$ 

> dsolve(eq1_9,y(x));

      y(x) = _C1 e^x
> dsolve({eq1_9,y(0)=3},y(x));

      y(x) = 3 e^x
> dsolve({eq1_9,y(1)=-2},y(x));

      y(x) = - $\frac{2 e^x}{e}$ 
> DEplot(eq1_9,y(x),x=-3..3,y(x)=-6..6,{y(0)=3,y(1)=-2},
arrows=medium,linestyle=blue);
```



รูป 1.4 $y = ce^x$ เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว

ตัวอย่าง 1.9

Second – Order
IVPs

จงแสดงว่า $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ (1)

เป็นวงศ์เส้นโค้งพาราเมเตอร์สองตัวของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x'' + 16x = 0 \quad \text{.....(2)}$$

แล้วหาคำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$x'' + 16x = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x' = \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{.....(3)}$$

วิธีทำ จาก $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ หาอนุพันธ์อันดับสองของสมการ (3)

จะได้ $x' = -4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t$ (4)

และ $x'' = -16c_1 \cos 4t - 16c_2 \sin 4t$

แทน x'' และ x ลงทางซ้ายของสมการ (1) จะได้

$$x'' + 16x = (-16c_1 \cos 4t - 16c_2 \sin 4t) + 16(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t) = 0$$

ดังนั้น $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ เป็นวงศ์เส้นโค้งพาราเมเตอร์สองตัวของสมการเชิงอนุพันธ์ $x'' + 16x = 0$

จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ แทน $t = \frac{\pi}{2}$ และ $x = -2$ ในสมการ (1)

จะได้ $-2 = c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi = c_1(1) + c_2(0)$ ดังนั้น $c_1 = -2$

จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้นที่สอง $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ แทน $t = \frac{\pi}{2}$, $x' = 1$ ในสมการ (4)

จะได้ $1 = -4c_1 \sin 2\pi + 4c_2 \cos 2\pi = -4c_1(0) + 4c_2(1)$

ดังนั้น $c_2 = \frac{1}{4}$ แทนค่า c_1 และ c_2 ลงในสมการ (1) จะได้

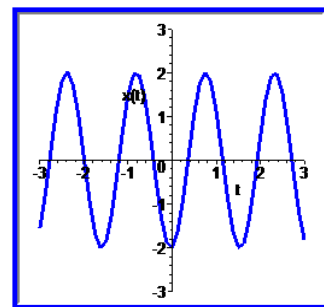
$x = \frac{1}{4} \sin 4t - 2 \cos 4t$ เป็นคำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการ (3)

กราฟของคำตอบแสดงดังรูป 1.5



การคำนวณปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและกราฟของคำตอบที่ผ่านจุด $(\pi/2, -2)$ โดย Maple

```
Chap 1 eq1_9 NEW.mws - [Server 1]
> restart;with(DEtools):
> eq1_9:=diff(x(t),t,t)+16*x(t)=0;
eq1_9 = (d^2 x(t))/dt^2 + 16 x(t) = 0
> dsolve(eq1_9,x(t));
x(t) = _C1 sin(4 t) + _C2 cos(4 t)
> dsolve({eq1_9,x(Pi/2)=-2,D(x)(Pi/2)=1},x(t));
x(t) = 1/4 sin(4 t) - 2 cos(4 t)
> DEplot(eq1_9,x(t),t=-3..3,x=-3..3,arrows=medium,linestyle=blue,[[x(Pi/2)=-2,
D(x)(Pi/2)=1]]);
```



เส้นโค้งคำตอบ $x = \frac{1}{4} \sin 4t - 2 \cos 4t$ รูป 1.5

ตัวอย่าง 1.10

จงแสดงว่าฟังก์ชัน $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ (1)

เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์สองตัวของสมการ

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad \text{.....(2)}$$

แล้ว หาคำตอบปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3 \quad \text{.....(3)}$$

วิธีทำ จาก $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ หาอนุพันธ์อันดับสองได้

$$y' = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} \quad \text{.....(4)}$$

และ $y'' = -c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x} \quad \text{.....(5)}$

แทน y , y' และ y'' ลงทางซ้ายของสมการ (2) จะได้

$$y'' - y' - 2y = (c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x}) - (-c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}) - 2(c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x})$$

ดังนั้น $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์สองตัวของสมการ (2)

ต่อไปหา c_1 และ c_2 โดยแทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 2$ และ $y'(0) = -3$

ลงในสมการ (1) และ (2) จะได้

$$\begin{cases} y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 2 \\ y'(0) = -c_1 e^0 + 2c_2 e^0 = -3 \end{cases} \quad \text{หรือ} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 = -3 \end{cases}$$

นำสมการ (6) บวกสมการ (7) จะได้ $3c_2 = -1$ หรือ $c_2 = -\frac{1}{3}$

แทน $c_2 = -\frac{1}{3}$ ลงในสมการ (6) จะได้ $c_1 = \frac{7}{3}$

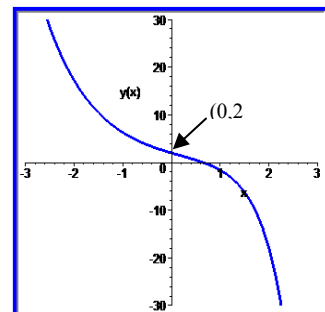
ดังนั้น คำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $y = \frac{7}{3} e^{-x} - \frac{1}{3} e^{2x}$

กราฟของคำตอบแสดงดังรูป 1.6



การคำนวณปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและการวาดกราฟของคำตอบที่ผ่านจุด(0,2)โดย Maple

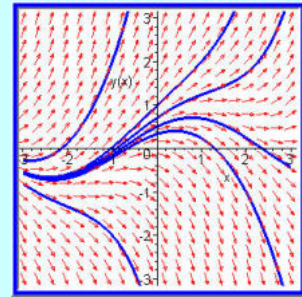
```
Chap 1 eq1_11.mws - [Server 1]
[> restart;with(DEtools):
> eq1_10:=diff(y(x),x,x)-diff(y(x),x)-2*y(x)-0;
eq1_11 = (d^2/dx^2 y(x)) - (d/dx y(x)) - 2 y(x) = 0
> dsolve(eq1_10,y(x));
y(x) = _C1 e^(-x) + _C2 e^(2x)
> dsolve({eq1_10,y(0)=2,D(y)(0)=-3},y(x));
y(x) = 7/3 e^(-x) - 1/3 e^(2x)
> DEplot(eq1_10,y(x),x=-3..3,y(x)=-30..30,arrows=medium,linestyle=blue,[[y(0)=2,
D(y)(0)=-3]]);
```



เส้นโค้งคำตอบ $y = \frac{7}{3} e^{-x} - \frac{1}{3} e^{2x}$ ที่ผ่านจุด(0,2) รูป 1.6

บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Differential Equations)



เส้นโค้งคำตอบบางส่วนของ $\frac{dy}{dx} = y - \sin x$

ในบทที่ 2 นี้ เราจะกล่าวถึงการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง และตีกริหนึ่งด้วยระเบียบวิธีต่าง ๆ ซึ่งต่อไปจะเรียกสั้น ๆ ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ และในบทที่ 3 จะกล่าวถึงบทประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและตีกริหนึ่ง เพื่อให้ผู้อ่านเห็นว่าสมการเชิงอนุพันธ์มีการประยุกต์ใช้อย่างไรได้บ้าง โดยในบทนี้จะเริ่มจากการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและตีกริหนึ่งในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

โดยที่ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร x, y หรืออาจจะเขียนอยู่ในรูป

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

เมื่อ $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ y

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = (x^2 - e^x)e^y$

เราสามารถเขียนได้ในรูป $(e^x - x^2)dx + e^{-y}dy = 0$ เป็นต้น

ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีหาคำตอบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งตีกริ 1 โดยแบ่งตามรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังหัวข้อต่อไปนี้

- 2.1 สมการแบบแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)
- 2.2 สมการแม่นตรง (Exact Equations)
- 2.3 ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต(Integrating Factors)
- 2.4 สมการเชิงเส้น (Linear Equations)
- 2.5 สมการเอกพันธ์ (Homogeneous Equations)
- 2.6 สมการที่แปลงรูปเป็นสมการเอกพันธ์ (Reduce to Homogeneous Equations)
- 2.7 สมการแบร์นูลลี และริคคาตี (Bernoulli Equations and Riccati Equations)
- 2.8 การแก้สมการโดยการแทนค่า (Substitution Method)
- 2.9 สมการอันดับสองที่หาคำตอบได้โดยวิธีการของสมการอันดับหนึ่ง

ตัวอย่างการหาคำตอบของสมการแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)

ตัวอย่าง 2.1

Separable DE.

จงแสดงว่า สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \quad \dots(1)$$

แยกตัวแปรได้ และจงหาคำตอบทั่วไปพร้อมแสดงสนามแสดงทิศทางและเส้นโค้งคำตอบที่ผ่านจุด (0,-2)

วิธีทำ จากโจทย์ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$

แยกตัวแปรได้เป็น

$$(1-y^2)dy = x^2dx$$

หรือ $-x^2dx + (1-y^2)dy = 0$ เป็นสมการแยกตัวแปรได้

โดยการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง

$$-\int x^2dx + \int (1-y^2)dy = c_1$$

$$\text{จะได้ } -\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3} = c_1$$

ดังนั้น $x^3 - 3y + y^3 = c$, $c = -3c_1$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ (1)

กราฟของสนามทิศทางของคำตอบและเส้นโค้งคำตอบที่ผ่านจุด (0,-2)แสดงดังรูป 2.1



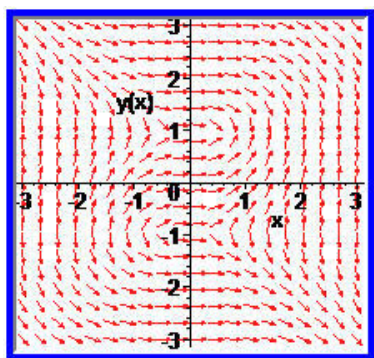
การวาดกราฟของสนามทิศทางของคำตอบและเส้นโค้งคำตอบที่ผ่านจุด(0,-2)โดย Maple

```

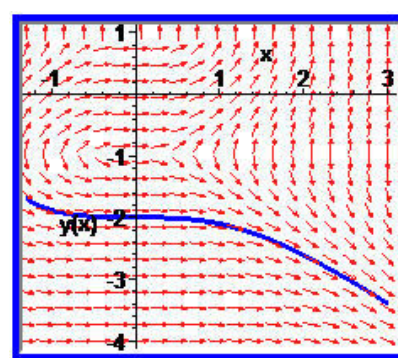
[> restart;with(DEtools):
> eq2_1:=diff(y(x),x)=x^2/(1-y(x)^2);

eq2_1 := \frac{d}{dx}y(x) = \frac{x^2}{1-y(x)^2}

[> DEplot(eq2_1,y(x),x=-3..3,y(x)=-3..3,arrows=medium,linecolor=blue);
[> DEplot(eq2_1,y(x),x=-1.7..2,y(x)=-3..2,[y(0)=-2],arrows=medium,linecolor=blue);
    
```



ก. สนามทิศทางของคำตอบของสมการ (1)



รูป 2.1 ข. เส้นโค้งคำตอบของ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$ ที่ผ่านจุด(0,-2)

ตัวอย่าง 2.4

An Initial Value Problem

จงหาคำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4, \quad y(0) = -2 \quad \text{.....(1)}$$

วิธีทำ เราแยกตัวแปรของสมการ (1) ได้เป็น $\frac{dy}{y^2 - 4} = dx$ (2)

และใช้การแยกเป็นเศษส่วนย่อยและหาปริพันธ์ของ

$$\int \left(\frac{-1/4}{y+2} + \frac{1/4}{y-2} \right) dy = \int dx \quad \text{ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้}$$

$$\text{หรือ} \quad -\frac{1}{4} \int \frac{1}{y+2} dy + \frac{1}{4} \int \frac{1}{y-2} dy = \int dx$$

$$\text{จะได้} \quad -\frac{1}{4} \ln|y+2| + \frac{1}{4} \ln|y-2| + \ln|c| = x \quad \text{.....(3)}$$

$$\ln \left| \frac{c(y-2)}{y+2} \right| = 4x \quad \text{หรือ} \quad \frac{c(y-2)}{y+2} = e^{4x}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad y = 2 \frac{c + e^{4x}}{c - e^{4x}} \quad \text{เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ} \quad \text{.....(4)}$$

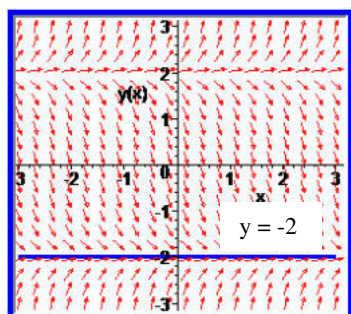
จากเงื่อนไขเริ่มต้นแทน $x = 0, y = -2$ ในสมการ (4) ได้ $c = 0$

ดังนั้น คำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นคือ $y = -2$ กราฟของสนามทิศทางของคำตอบและเส้นโค้งคำตอบที่ผ่านจุด $(0, -2)$ แสดงในรูป 2.4

การคำนวณปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและการวาดเส้นโค้งคำตอบโดย Maple

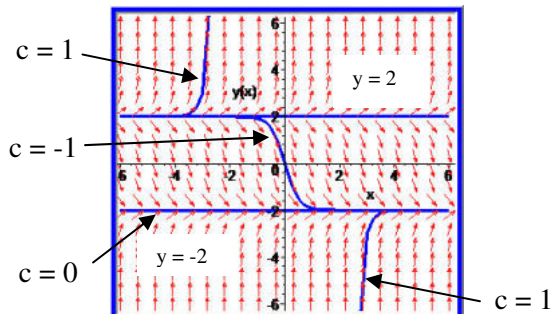
```

> restart; with(DEtools);
> eq2_4:=diff(y(x),x)=y(x)^2-4;
> dsolve(eq2_4,y(x));
eq2_4:=d/dx y(x)=y(x)^2-4
y(x)=-2
> dsolve({eq2_4,y(0)=-2},y(x));
y(x)=-2
> DEplot(eq2_4,y(x),x=-3..3,y(x)=-3..3,{y(0)=-2},arrows=medium,linestyle=blue);
> DEplot(eq2_4,y(x),x=-6..6,y(x)=-6..6,[[y(0)=-2],[y(0)=2],[y(0)=0],[y(3)=-3],[y(-3)=3]],arrows=medium,linestyle=blue);
    
```

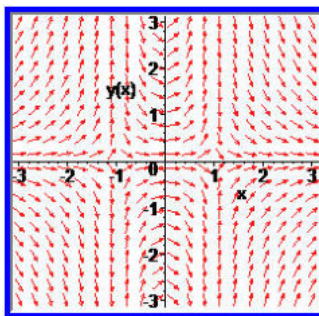


ก.

รูป 2.4



ข.

ข้อสังเกต	สำหรับสมการแม่นตรง การหาคำตอบมิได้มีเพียงการใช้ทฤษฎีดังกล่าวอย่าง 2.14 และ 2.15 เท่านั้น แต่เราสามารถหาคำตอบของสมการแม่นตรงได้อีกแบบหนึ่ง คือ การรวมกลุ่ม การจัดกลุ่ม หรือ แยกกลุ่มที่เหมาะสมแล้วจึงอินทิเกรตตลอด เราจะได้คำตอบเช่นเดียวกันแต่วิธีการนี้ เราจะใช้กับปัญหาโจทย์ที่ไม่ยุ่งยากซับซ้อนและจัดกลุ่มโดยวิธีการตรวจตรงได้ไม่ยากนัก ทั้งนี้สิต และ นักศึกษาต้องมีความชำนาญและมีประสบการณ์พอสมควร จึงจะแก้ปัญหาลักษณะนี้ได้รวดเร็ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้
ตัวอย่าง 2.16	จงหาคำตอบของสมการ $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$(1) วิธีทำ ในที่นี้ $M(x, y) = 2xy$ และ $N(x, y) = x^2 - 1$ ก่อนอื่นต้องตรวจสอบว่าสมการ (1) เป็นสมการแบบแม่นตรงเสียก่อน นั่นคือ ตรวจสอบ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ เพราะว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$ ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการแม่นตรง จากโจทย์ $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ จะได้ $2xydx + x^2dy - dy = 0$ โดยวิธีจัดกลุ่มของดิฟเฟอเรนเชียลของผลคูณ จะได้ $d(x^2y) - dy = 0$ โดยการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ $\int d(x^2y) - \int dy = C$ หรือ $x^2y - y = C$ เป็นคำตอบโดยปริยาย กราฟของสนามแสดงทิศทางของคำตอบ แสดงดังรูป 2.10
เรามักแยกเทอมที่อยู่ในรูป $f(x)dx$ หรือ $g(y)dy$ แยกไว้ต่างหากแล้วที่เหลือนำมาจัดกลุ่มเพราะอินทิเกรตได้อยู่แล้ว	การคำนวณคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์และการวาดกราฟของสนามแสดงทิศทางของคำตอบโดย Maple <pre> S5Chap26Graph ชอ2_15.mws - [Server 1] > restart;with(DEtools): > eq2_16:=diff(y(x),x)=(2*x*y(x))/(1-x^2); eq2_16:=d/dx y(x)=2*x*y(x)/(1-x^2) > dsolve(eq2_16,y(x)); y(x)=C1/(x-1)(x+1) > pEplot(eq2_16,y(x),x=-3..3,y(x)=-3..3,arrows=medium,linestyle=blue) </pre>  กราฟของสนามแสดงทิศทางคำตอบของสมการ $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ รูป 2.10

ทฤษฎี 2.4	กำหนดให้ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ เป็นสมการเชิงเส้น จะได้
Solution Formula	1. $\mu = e^{\int P(x)dx}$ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต 2. $\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x)$(2.43) 3. คำตอบของสมการเชิงเส้น คือ $y = \mu^{-1} \left[\int \mu Q(x) dx + C \right]$(2.44)
	ตัวอย่างเช่น $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$ ในที่นี้ $P(x) = -1$, $Q(x) = e^{2x}$ จะได้ $\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int (-1)dx} = e^{-x}$ ดังนั้น $y = e^{\int dx} \left[\int e^{-\int dx} e^{2x} dx + C \right]$ $= e^x \left[\int e^{-x} e^{2x} dx + C \right]$ $= Ce^x + e^{2x}$ ในทำนองเดียวกันสมการ $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$ เป็นสมการเชิงเส้น จะได้ $\mu = e^{\int P(y)dy}$ และคำตอบคือ $x = e^{\int P(y)dy} \left[\int e^{\int P(y)dy} Q(y) dy + C \right] \quad \text{.....(2.45)}$ หรือ $x = \mu^{-1} \left[\int \mu Q(y) dy + C \right] \quad \text{.....(2.46)}$ ตัวอย่างเช่น $\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{1}{y^2}$ จะได้ $\mu = e^{\int 3/y dy} = y^3$, $Q(y) = \frac{1}{y^2}$ และคำตอบคือ $x = \mu^{-1} \left[\int \mu Q(y) dy + C \right]$ $= y^{-3} \left[\int y^3 \frac{1}{y^2} dy + C \right]$ $= y^{-3} \left[\frac{y^2}{2} + C \right]$ $= \frac{1}{2y} + \frac{C}{y^3}$



บทที่ 3

การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง (Applications of First-Order Ordinary Differential Equation)

แบบจำลองกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ในบทที่ 1 ได้กล่าวถึงตัวแบบหรือแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์มาบ้างแล้ว ในบทนี้จะกล่าวเพิ่มเติมพร้อมทั้งพิจารณาคำตอบของตัวแบบเหล่านั้นด้วย เพราะขณะนี้เรามีเครื่องมือเพียงพอในการหาคำตอบของตัวแบบที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สมการเชิงอนุพันธ์เป็นที่น่าสนใจสำหรับนักวิทยาศาสตร์ ไม่ใช่ นักคณิตศาสตร์มาตั้งแต่สมัยแรกๆ เพราะว่าเขาสามารถใช้สมการเชิงอนุพันธ์ตรวจสอบปัญหาต่าง ๆ ได้มากมายทั้งทางด้านฟิสิกส์ ชีววิทยา วิทยาศาสตร์ และสังคม ไม่ว่าจะเป็นการประยุกต์ใช้ในด้านใดก็ตาม จะมีกระบวนการอยู่ 3 ขั้นตอน คือ

ขั้น 1 การแปลงปัญหากายภาพสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งโดยทั่วไปทำได้โดยตั้งสมมติฐานให้สอดคล้องกับปรากฏการณ์ที่ได้จากการสังเกต ตัวอย่างเช่น สังเกตว่าสารกัมมันตภาพรังสีสลายตัวด้วยอัตราซึ่งเป็นสัดส่วนกับสารที่เหลืออยู่ในขณะนั้น ความร้อนไหลผ่านจากวัตถุที่อุ่นกว่าไปยังวัตถุที่เย็นกว่าด้วยอัตราที่เป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิ วัตถุเคลื่อนที่เป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ประชากรแมลงที่แยกอยู่อย่างโดดเดี่ยวจะเติบโตด้วยอัตราที่เป็นสัดส่วนกับประชากรในขณะนั้น แต่ละกรณีนี้

ตัวอย่าง 3.1	วงจรไฟฟ้าต่อกันเป็นอนุกรม ประกอบด้วย เครื่องกำหนดไฟฟ้ามี
Series Circuit	แรงเคลื่อนไฟฟ้า $E = 12$ โวลต์ (Volt) ตัวเหนี่ยวนำ $\frac{1}{2}$ เฮนรี (Henry) และตัวต้านทาน 10 โอห์ม (Ohms) จงหากระแสไฟฟ้าในวงจรไฟฟ้าอนุกรม RL ดังแสดงในรูป 3.2 ถ้ากระแสเริ่มต้นเท่ากับศูนย์
	วิธีทำ สมการสำหรับหากระแสไฟฟ้า i ในวงจรอนุกรม RL คือ $L \frac{di}{dt} + Ri = E(t) \quad \text{.....(1)}$ แทนค่า $L = \frac{1}{2}$, $R = 10$ และ $E(t) = 12$ ในสมการ (1) จะได้ $\frac{1}{2} \frac{di}{dt} + 10i = 12 \quad \text{หรือ} \quad \frac{di}{dt} + 20i = 24 \quad \text{.....(2)}$ โดยเงื่อนไขเริ่มต้น กำหนด $i(0) = 0$(3) สมการ(2) เป็นสมการเชิงเส้น โดยที่ $P(t) = 20$, $Q(t) = 24$ และตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต $\mu = e^{\int 20dt} = e^{20t}$ นำ e^{20t} คูณสมการ(2) แล้วจัดกลุ่มได้ $e^{20t} \frac{di}{dt} + 20i e^{20t} = 24e^{20t}$ หรือ $\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t}$ หาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ $e^{20t} i(t) = \frac{6}{5}e^{20t} + c \quad \text{หรือ} \quad i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t} \quad \text{.....(4)}$ จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $i(0) = 0$ แทน $t = 0$, $i = 0$ ในสมการ(4) จะได้ $0 = \frac{6}{5} + c$ หรือ $c = -\frac{6}{5}$ ดังนั้น กระแสไฟฟ้าในวงจรนี้ คือ $i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$ □

ตัวอย่าง 3.5	วงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่งมีแบตเตอรี่ขนาด 30 โวลต์ ต่อแบบอนุกรม RL
RL Series Circuit	มีตัวเหนี่ยวนำขนาด 0.1 เฮนรี และตัวต้านทานขนาด 50 โอห์ม จงหากระแสในวงจร ถ้า $i(0) = 0$ และหากระแสเมื่อ $t \rightarrow \infty$
	วิธีทำ ในวงจรแบบ RL ดังรูป 3.2 จะได้ สมการ $L \frac{di}{dt} + Ri = E(t) \quad \dots(1)$ ในที่นี้ $L = 0.1$, $R = 50$ และ $E(t) = 30$ แทนในสมการ (1) จะได้ $0.1 \frac{di}{dt} + 50i = 30$ หรือ $\frac{di}{dt} + 500i = 300 \quad \dots(2)$ เป็นสมการเชิงเส้น มีตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต คือ $\mu = e^{\int 500dt} = e^{500t}$ เอา e^{500t} คูณสมการ จะได้ $e^{500t} \frac{di}{dt} + 500i e^{500t} = 300 e^{500t}$ หรือ $\frac{d}{dt} [e^{500t} i] = 300 e^{500t}$ อินทิเกรตได้ $e^{500t} i = \frac{3}{5} e^{500t} + c$ หรือ $i = \frac{3}{5} + c e^{-500t} \quad \dots(2)$ เมื่อ $i(0) = 0$ จะได้ $c = -\frac{3}{5}$ ดังนั้น $i(t) = \frac{3}{5} (1 - e^{-500t})$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$ จะได้ $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{5} (1 - e^{-500t})$ $= \frac{3}{5}$ นั่นคือ กระแสในวงจรมีขนาด $\frac{3}{5}$ แอมแปร์ เมื่อ $t \rightarrow \infty$



ตัวอย่าง 3.19

จากกฎการเย็นตัวของนิวตันกล่าวว่า “อัตราการเปลี่ยนอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม” ถ้าวัตถุชิ้นหนึ่งมีอุณหภูมิ 50°F วางไว้ในห้องที่มีอุณหภูมิ 100°F หลังจากเวลาผ่านไป 5 นาทีอุณหภูมิของวัตถุเป็น 60°F จงหาสมการสำหรับอุณหภูมิของวัตถุที่เวลา t ใดๆ

วิธีทำ ให้ T แทนอุณหภูมิของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ

ดังนั้น $\frac{dT}{dt}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของวัตถุ

จากกฎการเย็นตัวของนิวตัน จะได้ว่า

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 100) \quad (k > 0)$$

ดังนั้น $\frac{dT}{dt} + kT = 100k$ เป็นสมการเชิงเส้น จะได้

$$T = ce^{-kt} + 100$$

เมื่อ $t = 0$ ได้ $T = 50$, ดังนั้น $c = -50$ จะได้

$$T = -50e^{-kt} + 100$$

เมื่อ $t = 5$ จะได้ $T = 60$ ดังนั้น

$$60 = -50e^{-5k} + 100, \quad 5e^{-5k} = 4$$

$$k = -\frac{1}{5} \ln \frac{4}{5} = 0.045$$

ดังนั้น อุณหภูมิของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ คือ

$$T = -50e^{-0.045t} + 100$$



ตัวอย่าง 3.22	อัตราการสลายตัวของพลูตอเรเนียม 238 เป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณของพลูตอเรเนียม 238 ที่ไม่สลายตัว และเมื่อเวลาผ่านไป 15 ปี พบว่าของพลูตอเรเนียม 238 สลายตัวไป 0.043% ของของพลูตอเรเนียม 238 เมื่อเริ่มต้นเท่ากับ A_0 จงหาระยะเวลาที่ของพลูตอเรเนียม 238 สลายตัวไปครึ่งหนึ่ง (Half - Life) ของปริมาณเดิม
Half - Life of Plutonium	วิธีทำ ให้ $A(t)$ แทน ปริมาณของพลูตอเรเนียมที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใดๆ เราต้องการหาคำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $\frac{dA}{dt} = -kA, \quad A(0) = A_0 \quad \dots(1)$ ซึ่งสมการ (1) เป็นสมการแยกตัวแปรได้ หาปริพันธ์ทั้งสองข้างของ จะได้ $\ln A = -kt + c$ $A = c_1 e^{-kt} \quad \text{เมื่อ} \quad c_1 = e^c \quad \dots(2)$ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $A(0) = A_0$ แทน $t = 0, A = A_0$ จะได้ $A_0 = c_1 e^0 \quad \text{หรือ} \quad c_1 = A_0$ ดังนั้น คำตอบเฉพาะคือ $A = A_0 e^{-kt}$(3) ถ้าในเวลา 15 ปี ของพลูตอเรเนียมหายไป 0.043% แสดงว่าจะเหลือของพลูตอเรเนียมอยู่ 99.957% ของปริมาณเดิม นั่นคือ $(0.99957)A_0 = A(15)$(4) แทน $t = 15$ และ $A = (0.99957)A_0$ ลงในสมการ (3) จะได้ $0.99957 A_0 = A_0 e^{-15k} \quad \dots(5)$ แก้สมการ (5) หาค่า k จะได้ $k = \frac{1}{15} \ln(0.99957) = -0.00002867$ จากสมการ (3) จะได้ $A(t) = A_0 e^{-0.00002867t} \quad \dots(6)$ ต่อไปต้องการหาครึ่งชีวิตของพลูตอเรเนียม คือ ระยะเวลาที่ของพลูตอเรเนียมหายไป 50% แทน $A(t) = \frac{1}{2} A_0$ ในสมการ (6) แล้วแก้สมการหา t ดังนี้ $\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-0.00002867t} \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{2} = e^{-0.00002867t}$ ดังนั้น $t = \frac{\ln 2}{0.00002867} \approx 24,180$ ปี □

บทที่ 4

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง (Higher-Order Differential Equation)



ในบทที่ 2 และ 3 เราได้กล่าวถึงระเบียบวิธีการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สามารถใช้เป็นตัวแทนของสถานการณ์ต่าง ๆ มากมายทางกายภาพ อย่างไรก็ตามยังมีสถานการณ์ทางกายภาพอีกมากมายเช่นกัน ที่ต้องการตัวแทนที่อธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงขึ้น ตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ.1735 เดเนียล แบร์นูลลี (Daniel Bernoulli : ค.ศ.1700-1782) ศึกษาการสั่นของคานที่มีลักษณะยืดหยุ่น ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ในรูป

$$k^4 \frac{d^4 y}{dx^4} = y \quad \dots(4.1)$$

สมการ (4.1) สามารถเขียนใหม่ในรูป

$$y - k^4 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad \dots(4.2)$$

ทั้ง แบร์นูลลี และออยเลอร์ พบว่า คำตอบของสมการ (4.2) คือ $y = e^{\frac{x}{k}}$ แต่จะต้องมีคำตอบอื่นๆของ สมการอีก

4.1 ทฤษฎีเบื้องต้นของสมการเชิงเส้น

ในบทนี้ เราจะศึกษาการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงกว่าหนึ่ง ซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง บทนิยามและทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n อยู่ในรูป

$$\text{แก้สมการ} \quad : \quad a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไข} \quad : \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad \dots(4.3)$$

ซึ่งเป็นการหาฟังก์ชันที่นิยามบนบางช่วง I โดยที่ $x_0 \in I$ และสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ พร้อมกับ n เงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดค่าที่ x_0

บทที่ 4.3 สมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 4.39

Higher Order

จงหาคำตอบทั่วไป ของสมการ

$$2\frac{d^5 y}{dx^5} - 7\frac{d^4 y}{dx^4} + 12\frac{d^3 y}{dx^3} + 8\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

เนื่องจาก ส.ป.ส. m^3
คือ 2 และคงที่คือ 8
อาจจะทดลองหาค่า
โดยการสมมติให้ m
หรือ $2m$ เท่ากับ
 $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

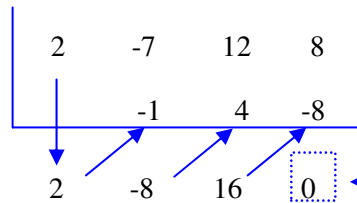
วิธีทำ สมการช่วย คือ $2m^5 - 7m^4 + 12m^3 + 8m^2 = 0$

$$m^2(2m^3 - 7m^2 + 12m + 8) = 0$$

$$m = 0, 0 \text{ หรือ } 2m^3 - 7m^2 + 12m + 8 = 0$$

ให้ $2m = -1$ หรือ $m = -\frac{1}{2}$

$$m = -\frac{1}{2}$$



แสดงว่า $m = -\frac{1}{2}$ เป็นราก

$$\text{ดังนั้น } m^2\left(m + \frac{1}{2}\right)(2m^2 - 8m + 16) = 0$$

$$m = 0, 0, -\frac{1}{2} \text{ หรือ } 2m^2 - 8m + 16 = 0$$

$$\text{หรือ } m = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(2)(16)}}{2(2)} = 2 \pm 2i$$

จึงสรุปได้ว่า $m = 0, 0, -\frac{1}{2}, 2 \pm 2i$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการ คือ

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{0x} + c_3 e^{-x/2} + e^{2x}(c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x) \\ = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x/2} + e^{2x}(c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x)$$



การคำนวณคำตอบของสมการเอกพันธ์โดย Maple

บทที่ 4.3 สมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 4.40

An Initial – Value Problems

จงหาคำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y''' + 12y'' + 36y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -7$$

วิธีทำ สมการช่วย คือ $m^3 + 12m^2 + 36m = 0$

$$m(m^2 + 12m + 36) = 0$$

$$m(m+6)^2 = 0, \quad m = 0, -6, -6$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-6x} + c_3 x e^{-6x} \quad \text{ดังนั้น} \quad y(0) = c_1 + c_2 = 0 \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad y' &= -6c_2 e^{-6x} + c_3 (x e^{-6x} (-6) + e^{-6x} (1)) \\ &= -6c_2 e^{-6x} + c_3 e^{-6x} - 6c_3 x e^{-6x} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad y'(0) = -6c_2 + c_3 = 1 \quad \dots(2)$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad y'' &= 36c_2 e^{-6x} - 6c_3 e^{-6x} - 6c_3 [x e^{-6x} (-6) + e^{-6x} (1)] \\ &= 36c_2 e^{-6x} - 12c_3 e^{-6x} + 36c_3 x e^{-6x} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad y''(0) = 36c_2 - 12c_3 = -7 \quad \dots(3)$$

จากระบบสมการ (1)-(3) จะได้

$$c_1 + c_2 = 0, \quad -6c_2 + c_3 = 1 \quad \text{และ} \quad 36c_2 - 12c_3 = -7$$

$$\text{ดังนั้น} \quad c_1 = \frac{5}{36}, \quad c_2 = -\frac{5}{36}, \quad c_3 = \frac{1}{6}$$

$$\text{คำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ} \quad y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36} e^{-6x} + \frac{1}{6} x e^{-6x} \quad \square$$

การคำนวณคำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้นโดย Maple

```

Maple 11 - [Untitled (2) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
[> restart;with(DEtools):
> eq4_40:=diff(y(x),x$3)+12*diff(y(x),x$2)+36*diff(y(x),x)=0;

eq4_40 := (d^3 y(x) / dx^3) + 12 (d^2 y(x) / dx^2) + 36 (d y(x) / dx) = 0

> dsolve({eq4_40, y(0)=0, D(y)(0)=1, D(D(y))(0)=-7}, y(x));

y(x) = 5/36 - 5/36 e^(-6x) + 1/6 e^(-6x) x
    
```

Time: 25.8s Bytes: 1.19M Available: 860M

ตัวอย่าง 4.41

An Initial – Value Problems

จงหาคำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

วิธีทำ สมการช่วย คือ $m^3 + 2m^2 - 5m - 6 = 0$

จะได้ $m = -1, 2$ และ -3 ดังนั้น คำตอบทั่วไป คือ

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$$

หา y' และ y'' และแทนเงื่อนไขต่างๆ จะได้

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad -c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 0, \quad c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad c_1 = -\frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{1}{15}, \quad c_3 = \frac{1}{10}$$

นั่นคือ คำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ

$$y = -\frac{1}{6} e^{-x} + \frac{1}{15} e^{2x} + \frac{1}{10} e^{-3x}$$



การคำนวณคำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้นโดย Maple

```

[> restart:with(DEtools):
> eq4_41:=diff(y(x),x$3)+2*diff(y(x),x$2)-5*diff(y(x),x)-6*y(x)=0;

eq4_41 := (d^3/dx^3 y(x)) + 2 (d^2/dx^2 y(x)) - 5 (d/dx y(x)) - 6 y(x) = 0

> dsolve(eq4_41,y(x));

y(x) = _C1 e^(-3 x) + _C2 e^(2 x) + _C3 e^(-x)

> dsolve({eq4_41,y(0)=0,D(y)(0)=0,D(D(y))(0)=1},y(x));

y(x) = 1/10 e^(-3 x) + 1/15 e^(2 x) - 1/6 e^(-x)
    
```

Time: 0.1s Bytes: 384K Available: 64.3M

ตัวอย่าง 4.97

จงหาคำตอบทั่วไปของสมการ $y''' + 4y' = \sec 2x$

วิธีทำ จากสมการช่วย $m^3 + 4m = 0$ หรือ $m(m^2 + 4) = 0$

จะได้ $m_1 = 0$, $m_2 = 2i$, $m_3 = -2i$

ดังนั้น $y_c = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$ (1)

ให้ $y_1 = 1$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = \sin 2x$ และ $f(x) = \sec 2x$

และสมมติให้ $y_p = u_1 + u_2 \cos 2x + u_3 \sin 2x$ (2)

จากนั้นคำนวณรอนเสกียน ได้

$$W(1, \cos 2x, \sin 2x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ 0 & -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = 8$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ \sec 2x & -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = 2\sec 2x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin 2x \\ 0 & 0 & 2\cos 2x \\ 0 & \sec 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = -2$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 0 \\ 0 & -2\sin 2x & 0 \\ 0 & -4\cos 2x & \sec 2x \end{vmatrix} = -2\tan 2x$$

จากสมการ (4.60) ได้

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{\sec 2x}{4} \rightarrow u_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \sec 2x d(2x) = \frac{1}{8} \ln|\sec 2x + \tan 2x|$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = -\frac{1}{4} \rightarrow u_2 = -\frac{1}{4} \int dx = -\frac{1}{4}x$$

$$u_3' = \frac{W_3}{W} = -\frac{\tan 2x}{4} \rightarrow u_3 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \tan 2x d(2x) = \frac{1}{8} \ln|\cos 2x|$$

แทน u_1 , u_2 และ u_3 ลงใน (2) ได้คำตอบทั่วไป คือ

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + \left(\frac{1}{8} \ln|\sec 2x + \tan 2x|\right)$$

$$+ \left(-\frac{1}{4}x\right) \cos 2x + \left(\frac{1}{8} \ln|\cos 2x|\right) \sin 2x$$

$$= c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + \frac{1}{8} \ln|\sec 2x + \tan 2x| - \frac{1}{4}x \cos 2x$$

$$+ \frac{1}{8} \sin 2x \ln|\cos 2x|$$



บทที่ 4.4 การหาคำตอบเฉพาะโดยวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์

ตัวอย่าง 4.101

ถ้าคำตอบทั่วไปของสมการ $x^2 y'' + xy' = 0, x > 0$

คือ $y_c = c_1 + c_2 \ln x$ แล้วจงแก้สมการไม่เอกพันธ์

$$x^2 y'' + xy' = 2x^2, x > 0 \quad \dots(1)$$

วิธีทำ เราหาคำตอบเฉพาะโดยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์

ในที่นี้ $y_c = c_1 + c_2 \ln x \quad \dots(2)$

สมมติให้ $y_p = u_1 + u_2 \ln x \quad \dots(3)$

คำนวณรอนเสกียนของ y_1 และ y_2 เมื่อ $y_1 = 1$ และ $y_2 = \ln x$ ได้

$$W(1, \ln x) = \begin{vmatrix} 1 & \ln x \\ 0 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

จากนั้นทำสัมประสิทธิ์หน้า y'' ให้เป็น 1 เพื่อจัดสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้

$$y'' + \frac{1}{x} y' = 2 \quad \text{ดังนั้น} \quad f(x) = 2 \quad \text{จาก (4.55) ได้}$$

$$u_1' = -\frac{(\ln x)(2)}{\frac{1}{x}} \rightarrow u_1 = -2 \int x \ln x dx = -x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2$$

$$u_2' = \frac{(1)(2)}{\frac{1}{x}} \rightarrow u_2 = 2 \int x dx = x^2$$

จะได้คำตอบเฉพาะ คือ

$$y_p = u_1 + u_2 \ln x = (-x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2)(1) + (x^2)(\ln x) = \frac{1}{2} x^2$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการไม่เอกพันธ์ คือ

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 \ln x + \frac{1}{2} x^2, x > 0$$



การคำนวณหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์โดยโปรแกรม Maple

```

> restart:with(DEtools):
> eq4_101:=x^2*diff(y(x),x$2)+x*diff(y(x),x)=2*x^2;

eq4_101 := x^2 (d^2/dx^2 y(x)) + x (d/dx y(x)) = 2 x^2

> dsolve(eq4_101,y(x));

y(x) = x^2/2 + _C1 ln(x) + _C2
    
```

ตัวอย่าง 4.124

Third - Order
และ
Homogeneous

จงแก้สมการ

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 5x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 8y = 0 \quad \dots (1)$$

วิธีทำ ให้ $y = x^m$ แล้วหาอนุพันธ์สามอันดับแรกของ $y = x^m$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

แทนค่า y และอนุพันธ์ของ y ในสมการ(1) จะได้

$$\begin{aligned} x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 5x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 8y &= x^3 m(m-1)(m-2)x^{m-3} + 5x^2 m(m-1)x^{m-2} \\ &\quad + 7xm x^{m-1} + 8x^m \\ &= x^m (m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8) \\ &= x^m (m^3 + 2m^2 + 4m + 8) \\ &= x^m (m+2)(m^2 + 4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $y = x^m$ จะเป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ เมื่อ $m_1 = -2$, $m_2 = 2i$

และ $m_3 = -2i$ แสดงว่า $\alpha = 0$ และ $\beta = 2$

จากสมการ (5) จะได้คำตอบทั่วไปของสมการเอกพันธ์ (1) คือ

$$y = c_1 x^{-2} + \underbrace{c_2 \cos(2 \ln x) + c_3 \sin(2 \ln x)}_{\alpha = 0, \beta = 2}$$



การคำนวณคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์โดย Maple

```

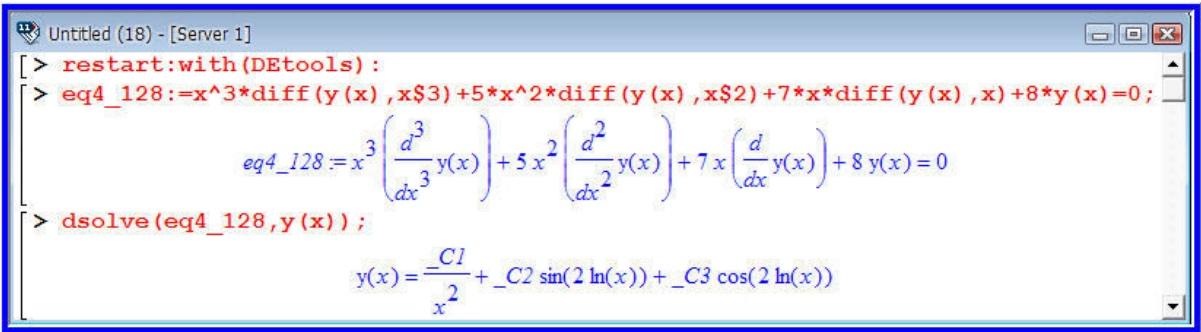
Untitled (11) - [Server 1]
[ > restart:with(DEtools):
> eq4_124:=x^3*diff(y(x),x$3)+5*x^2*diff(y(x),x$2)+7*x*diff(y(x),x)+8*y(x)=0;

eq4_124:=x^3*(d^3/dx^3 y(x))+5*x^2*(d^2/dx^2 y(x))+7*x*(d/dx y(x))+8*y(x)=0

> dsolve(eq4_124,y(x));

y(x)=-C1/x^2+_C2 sin(2 ln(x))+_C3 cos(2 ln(x))
    
```

บทที่ 4.5 สมการโคชี – ออยเลอร์

	ดังนั้น คำตอบทั่วไป คือ $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}$(3) แทน $e^t = x$ ลงใน (3) ได้ $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^4$ เป็นคำตอบที่ต้องการ □
ตัวอย่าง 4.128	จงแก้สมการ $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0$(1) โดยเปลี่ยนตัวแปรให้ $x = e^t$ วิธีทำ โดยการแทนค่า $x = e^t$ หรือ $t = \ln x$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$ และ $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right)$ แทนค่าลงในสมการ (1) และทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้ $x^3 \left(\frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) \right) + 5x^2 \left(\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right) + 7x \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) + 8y = 0$ หรือ $\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 8y = 0$(2) ซึ่งสมการ(2) เป็นสมการเอกพันธ์มีสมการช่วยเป็น $m^3 + 2m^2 + 4m + 8 = 0 \quad \text{หรือ} \quad (m+2)(m^2+4) = 0$ จะได้ $m = -2$ และ $m = \pm 2i$ ดังนั้น คำตอบทั่วไป คือ $y = c_1 e^{-2t} + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t$ แทน $t = \ln x$ หรือ $y = c_1 x^{-2} + c_2 \cos(2 \ln x) + c_3 \sin(2 \ln x)$ □
การคำนวณหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์โดย Maple	
 <pre> Untitled (18) - [Server 1] [> restart:with(DEtools): > eq4_128:=x^3*diff(y(x),x\$3)+5*x^2*diff(y(x),x\$2)+7*x*diff(y(x),x)+8*y(x)=0; eq4_128:=x^3*(d^3/dx^3 y(x))+5*x^2*(d^2/dx^2 y(x))+7*x*(d/dx y(x))+8*y(x)=0 > dsolve(eq4_128,y(x)); y(x)=C1/x^2+_C2 sin(2 ln(x))+_C3 cos(2 ln(x)) </pre>	

ตัวอย่าง 4.130

จงหาคำตอบของสมการ

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6x \frac{dy}{dx} - 6y = 3 + \ln x^3 \quad \dots(1)$$

วิธีทำ โดยการแทนค่า $x = e^t$ หรือ $t = \ln x$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

และ
$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right)$$

แทนค่าลงในสมการ (1) และทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} - 6y = 3 + 3t \quad \dots(2)$$

เป็นสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

มีสมการช่วยเป็น $m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = (m-1)(m-2)(m-3) = 0$

จะได้ $m_1 = 1, m_2 = 2$ และ $m_3 = 3$

ดังนั้น
$$y_c = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$$

หา y_p โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ สมมติให้ $y_p = A + Bt$

จะได้ $y_p' = B, y_p'' = y_p''' = 0$

แทนค่าลงใน (2) จะได้ $(11B - 6A) - 6Bt = 3 + 3t$

ดังนั้น $A = -\frac{17}{12}, B = -\frac{1}{2}$ เราจะได้ $y_p = -\frac{17}{12} - \frac{1}{2}t$

คำตอบทั่วไปของสมการ (2) คือ

$$y = y_c + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} - \frac{17}{12} - \frac{1}{2}t \quad \dots(3)$$

แทน $e^t = x$ และ $t = \ln x$ ใน (3) จะได้

คำตอบทั่วไปของสมการตั้งต้นบนช่วง $(0, \infty)$ คือ

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 - \frac{17}{12} - \frac{1}{2} \ln x$$



การคำนวณหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์โดย Maple

```

[> restart:with(DEtools):
> eq4_130:=-x^3*diff(y(x),x$3)-3*x^2*diff(y(x),x$2)+6*x*diff(y(x),x)-6*y(x)=3+ln(x^3);

eq4_130 = x^3 \left( \frac{d^3}{dx^3} y(x) \right) - 3 x^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + 6 x \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) - 6 y(x) = 3 + \ln(x^3)

> dsolve(eq4_130,y(x));

y(x) = -\frac{17}{12} - \frac{1}{6} \ln(x^3) + _C1 x + _C2 x^2 + _C3 x^3
    
```

ตัวอย่าง 4.131

จงหาคำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 4y = x^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad \dots(1)$$

วิธีทำ โดยการแทนค่า $x = e^t$ หรือ $t = \ln x$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \quad \text{และ} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

แทนค่าลงในสมการ (1) และทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) - 4 \frac{dy}{dt} + 4y = e^{2t}$$

หรือ
$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} + 4y = e^{2t} \quad \dots(2)$$

หา y_c จากสมการช่วยของสมการ (2) $m^2 - 5m + 4 = 0$ จะได้ $m_1 = 1, m_2 = 4$
ดังนั้น $y_c = c_1 e^t + c_2 e^{4t} \quad \dots(3)$

หา y_p โดยตัวดำเนินการผกผันวิธีลัด

คำตอบเฉพาะ
$$y_p = \frac{1}{D^2 - 5D + 4}(e^{2t}) = \frac{1}{2^2 - 5(2) + 4}e^{2t} = -\frac{1}{2}e^{2t}$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไป คือ $y = y_c + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t}$

หรือ
$$y = c_1 x + c_2 x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad \dots(4)$$

โดยเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(1) = 0, y'(1) = 0$ กับคำตอบทั่วไป (4)

จะได้ $c_1 = \frac{1}{3}$ และ $c_2 = \frac{1}{6}$ ดังนั้น คำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{และกราฟของเส้นโค้งคำตอบแสดงในรูป(4.13)} \quad \square$$

การคำนวณปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและการวาดเส้นโค้งคำตอบโดย Maple

```

> restart;with(DEtools):
> eq4_131:=x^2*diff(y(x),x$2)-4*x*diff(y(x),x)+4*y(x)-x^2;

eq4_131:=x^2*(d^2 y(x)/dx^2)-4*x*(d y(x)/dx)+4*y(x)-x^2

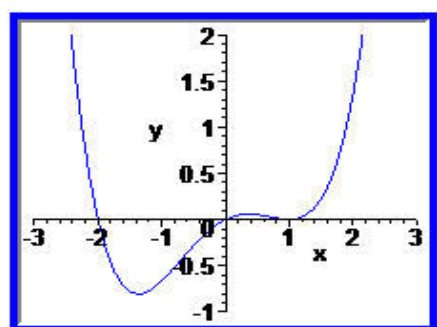
> dsolve({eq4_131,y(1)=0,D(y)(1)=0},y(x));

y(x)=1/3*x+1/6*x^4-1/2*x^2

> eq4_131:=(1/6*x^4)+(1/3*x)-(1/2*x^2);

eq4_131:=1/3*x+1/6*x^4-1/2*x^2

> plot({eq4_131},x=-3..3,y=-1..2,color=[blue]);
    
```



กราฟของเส้นโค้งคำตอบ $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ รูป 4.13

บทที่ 5

ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform)



ในบทที่ 3 เราได้ศึกษาวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น โดยเฉพาะกรณีที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ในบทนี้กล่าวถึงระเบียบวิธีอีกวิธีหนึ่ง สำหรับแก้สมการสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ซึ่งใช้กันอย่างกว้างขวางในวิศวกรรมไฟฟ้าหรือวิศวกรรมเครื่องกล และในวิทยาศาสตร์ประยุกต์สาขาต่างๆ อีกมากมาย ระเบียบวิธีนี้ง่ายกว่าระเบียบวิธีที่กล่าวถึงในบทที่ 3 เพราะเป็นการแปลงปัญหาค่าเริ่มต้นดังกล่าวไปสู่สมการพีชคณิตธรรมดาซึ่งแก้ปัญหได้ง่ายกว่า แล้วใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันแปลงกลับไปสู่ผลเฉลยของปัญหาเริ่มต้น นอกจากนี้ยังเป็นวิธีที่ใช้ได้กับกรณีฟังก์ชันอินพุตเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องหรือฟังก์ชันคาบ ผู้คิดค้นการแปลงลาปลาซนี้เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ ลาปลาซ ปีแยร์ ซิมง เดอ (คศ.1749–1829)

ในแคลคูลัส เราศึกษาการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตของฟังก์ชัน ซึ่งวิธีการดำเนินการทั้งสองแบบนี้เป็นการแปลง(Transform) รูปแบบหนึ่ง เป็นการแปลงฟังก์ชันหนึ่งไปเป็นอีกฟังก์ชันหนึ่ง และการแปลงดังกล่าวมีคุณสมบัติเชิงเส้น (Linearity Property) เช่นเดียวกัน

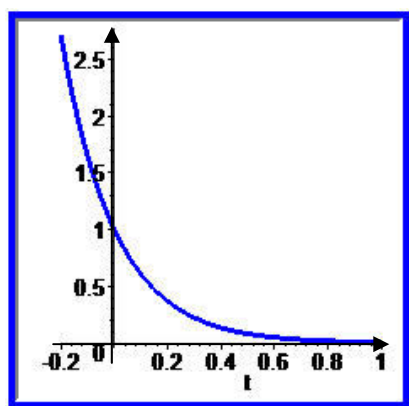
กล่าวคือ
$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = a \frac{d}{dx}f(x) + b \frac{d}{dx}g(x)$$

และ
$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

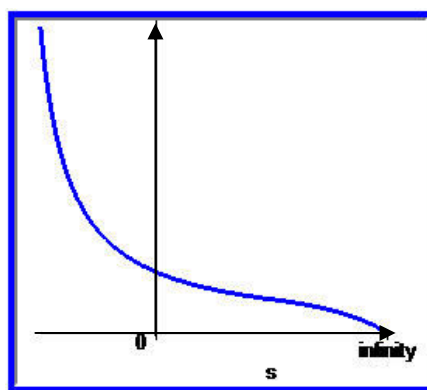
ในที่นี้เราจะกล่าวถึงการแปลงในรูปอินทิกรัลลักษณะพิเศษ ที่เราเรียกว่า ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) ดั่งนิยามที่จะกล่าวต่อไปนี้

5.1 บทนิยามของผลการแปลงลาปลาซ (The Laplace Transform)	
นิยาม 5.1	ถ้า $f(t)$ นิยามสำหรับ $t \geq 0$ แล้ว อินทิกรัลไม่ตรงแบบที่กำหนดในรูปลิมิตดังนี้ $\int_0^{\infty} K(s,t) f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s,t) f(t) dt \quad \dots\dots(5.1)$ ถ้าลิมิตหาค่าได้ จะกล่าวว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบหาค่าได้หรือลู่เข้า (Converge) จากนิยาม 5.1 แสดงให้เห็นว่านิยามดังกล่าวเป็นการแปลงฟังก์ชัน $f(t)$ ให้เป็นฟังก์ชันของ s อีกฟังก์ชันหนึ่งนั่นเอง มีผลการแปลงอินทิกรัลจำนวนมากมาย ที่ใช้ในคณิตศาสตร์ประยุกต์ ในที่นี้เป็นกรณีเฉพาะเราจะเลือก $K(s,t) = e^{-st}$ ซึ่งเป็นอินทิกรัลที่มีความสำคัญมากในการแปลงที่เราเรียกว่า ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform)
นิยาม 5.2	ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามทุก $t \geq 0$ ผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ คือ $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \dots\dots(5.2)$ สำหรับทุกค่า s ที่ทำให้อินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่เข้า
หมายเหตุ	เมื่ออินทิกรัลที่นิยามในสมการ (5.2) ลู่เข้า ผลที่ได้เป็นฟังก์ชันของ s เราจะเขียนแทนด้วย $F(s)$ นั่นคือ $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$ โดยทั่วไปเรานิยมเขียน ตัวอักษรพิมพ์เล็กแทนฟังก์ชันของ t เช่น $f, g, h, y, \dots$ และนิยมเขียนตัวอักษรพิมพ์ใหญ่แทนฟังก์ชันของ s เช่น F, G, H, Y ตามลำดับ เช่น $L\{f(t)\} = F(s)$, $L\{g(t)\} = G(s)$, $L\{y(t)\} = Y(s)$ เป็นต้น

บทที่ 5.1 บทนิยามของการแปลงลาปลาซ



ค. กราฟของ $f(t) = e^{-5t}$



รูป 5.3 ง. กราฟของการแปลง $F(s) = \frac{1}{s+5}$

ทฤษฎี 5.1

Linear
Properties
Of L.

คุณสมบัติเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ ให้ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

$$1. \quad L\{f(t) + g(t)\} = L\{f(t)\} + L\{g(t)\}$$

$$2. \quad L\{cf(t)\} = cL\{f(t)\}$$

สำหรับทุก s ที่ทำให้การแปลงลาปลาซของ $f(t)$ และ $g(t)$ มีจริง

พิสูจน์ 1 เพราะว่า $L\{f(t) + g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} [f(t) + g(t)] dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt$$

$$= L\{f(t)\} + L\{g(t)\}$$

พิสูจน์ 2 เพราะว่า $L\{cf(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} (cf(t)) dt$

$$= c \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$= cL\{f(t)\}$$



ข้อสังเกต

เราสามารถขยายทฤษฎี 5.1 ไปใช้ในกรณีผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชัน n ฟังก์ชันได้ ดังนี้

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t)\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\} + \dots + c_n L\{f_n(t)\}$$

รวมสูตรผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเบื้องต้น	
ทฤษฎี 5.2	$1. L\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0$ $2. L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, s > a$ $3. L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$ $4. L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$ $5. L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, s > a $ $6. L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, s > a $ $7. L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$
ข้อควรระวัง	$L\{f(t)g(t)\} \neq L\{f(t)\}L\{g(t)\}$ ตัวอย่างเช่น $f(t) = 3, g(t) = t$ เราพบว่า $L\{f(t)g(t)\} = L\{3t\} = 3L\{t\} = \frac{3}{s^2}$ แต่ $L\{f(t)\}L\{g(t)\} = L\{3\}L\{t\} = \frac{3}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{3}{s^3}$ จะเห็นว่า $L\{f(t)g(t)\} = \frac{3}{s^2} \neq \frac{3}{s^3} = L\{f(t)\}L\{g(t)\}$
ตัวอย่าง 5.8	จงหา $L\{f(t)\}$ เมื่อ $f(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t < 4 \\ 0, & 4 < t < 7 \\ e^{2t}, & 7 < t \end{cases}$
วิธีทำ	$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ $= \int_0^4 e^{-st} 5 dt + \int_4^7 e^{-st} 0 dt + \int_7^{\infty} e^{-st} e^{2t} dt$ $= 5 \int_0^4 e^{-st} dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_7^b e^{-(s-2)t} dt$ $= 5 \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^4 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-2)7}}{s-2} - \frac{e^{-(s-2)b}}{s-2} \right]$ $= \frac{5}{s} - \frac{5e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-7(s-2)}}{s-2} \quad \text{เมื่อ } s > 2$



บทที่ 5.1 บทนิยามของผลการแปลงลาปลาซ

ตัวอย่าง 5.18

จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = (e^t - e^{-t})^3$

ใช้สูตร
 $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

วิธีทำ จากเอกลักษณ์ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ และใช้คุณสมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซ จะได้

$$\begin{aligned} L\{(e^t - e^{-t})^3\} &= L\{e^{3t} - 3e^t + 3e^{-t} - e^{-3t}\} \\ &= L\{e^{3t}\} - 3L\{e^t\} + 3L\{e^{-t}\} - L\{e^{-3t}\} \\ &= \frac{1}{s-3} - 3\frac{1}{s-1} + 3\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \\ &= \frac{48}{(s^2-1)(s^2-9)} \end{aligned}$$



ตัวอย่าง 5.19

จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = e^{-3t} \sinh 5t$

ใช้สูตร
 $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sinh 5t = \frac{e^{5t} - e^{-5t}}{2}$ จะได้

$$e^{-3t} \sinh 5t = e^{-3t} \frac{e^{5t} - e^{-5t}}{2} = \frac{e^{2t} - e^{-8t}}{2}$$

โดยการใช้คุณสมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซ จะได้

$$\begin{aligned} L\{e^{-3t} \sinh 5t\} &= L\left\{\frac{e^{2t} - e^{-8t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{e^{2t}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-8t}\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+8} \\ &= \frac{5}{(s-2)(s+8)} \end{aligned}$$



การคำนวณผลการแปลงลาปลาซโดย Maple

```

S5 EX 5-18_19.mws - [Server 1]
[ > restart:with(inttrans) :
> L((exp(t)-exp(-t))^3):=laplace((exp(t)-exp(-t))^3,t,s);

L((e^t - e^(-t))^3) = 48 / ((s^2 - 1)(s^2 - 9))

> L(exp(-3*t)*sinh(5*t)):=laplace((exp(-3*t)*sinh(5*t)),t,s);

L(e^(-3*t) sinh(5*t)) = 5 / ((s-2)(s+8))
    
```