

DRIVING RANGE OF CALCULUS

ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์

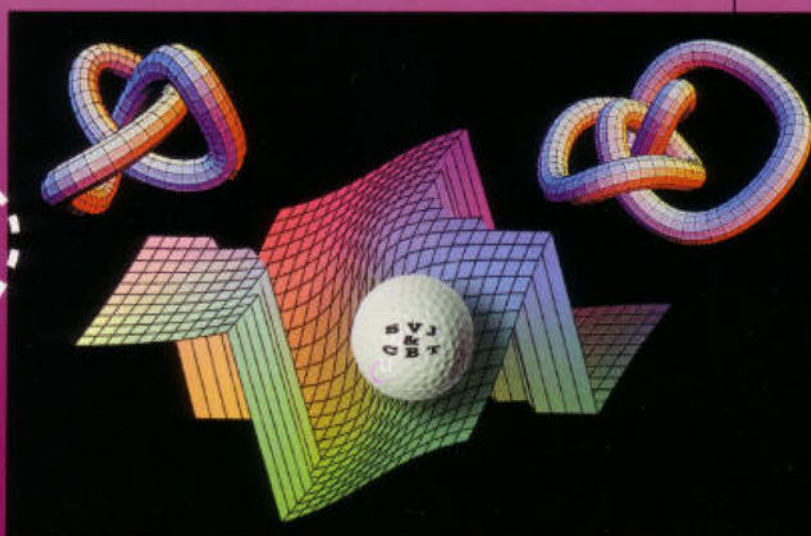
THEORY AND PROBLEMS

คณิตศาสตร์

วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENTISTS

FREE!
CALCULUS CONCEPT
MAPS



อินทิกรัลและการประยุกต์

THE INTEGRAL AND ITS APPLICATIONS

- ☑ สรุปสูตรนิยาม ทฤษฎี และตัวอย่างประกอบ
- ☑ 555 ตัวอย่างโจทย์พร้อมเฉลยโดยละเอียด
- ☑ 1571 โจทย์ปัญหาพร้อมคำตอบทุกข้อ
- ☑ 216 กราฟ 2 สี และ 195 กราฟโดยโปรแกรม Maple & Mathcad

รองศาสตราจารย์ ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แวเวจริญ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ประวัติผู้แต่ง



รองศาสตราจารย์ สิริบุตร นวนเจริญ



รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ น่ายเที่ยง

การศึกษา

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.บางเขน
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.ปทุมธานี
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)
- ศ.ด. (อุดมศึกษา), Cognate : สถิติ-วิจัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประสบการณ์

- หัวหน้า
- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ, ฝ่ายพัฒนา, ฝ่ายกิจการนักศึกษา
- รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

ปัจจุบัน

ฝ่าย

- ดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ (สจพ.)

ผลงานตำราวิชาการร่วมกัน

- SERIES 1 อนุพันธ์และการประยุกต์
- SERIES 2 อินทิกรัลและการประยุกต์
- SERIES 3 แคลคูลัสหลายตัวแปร
- SERIES 4 การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์

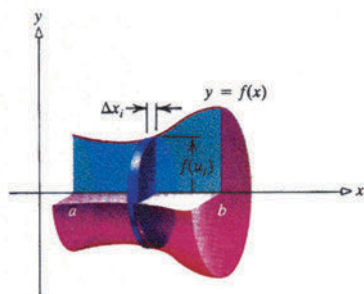
- SERIES 5 สมการเชิงอนุพันธ์ 1
- SERIES 6 สมการเชิงอนุพันธ์ 2 และการแปลงลาปลาซ
- SERIES 7 เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ, 3 มิติ
- SERIES 8 เมทริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น

ผลงานวิจัย

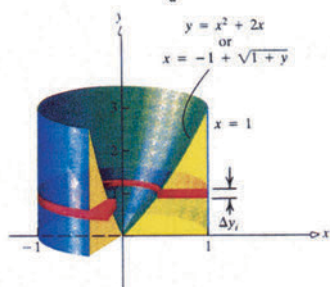
- การสร้างสื่อการเรียนการสอนสำหรับวิชาแคลคูลัส
- การพัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิชาแคลคูลัส (CAI) (ผู้ร่วมวิจัย)

- Elliptic Number และเส้นรอบวงของวงรี
- Elliptic Number and Approximation Function
- การทดสอบการรู้จำของอนุกรมโดยใช้คอมพิวเตอร์
- The Development of The Prerequisite Model in Basic Mathematics Course for Science and Technology Undergraduate Curricular by Using Concept Maps
- การใช้คอมพิวเตอร์สร้างฟังก์ชันไมโครสโคป

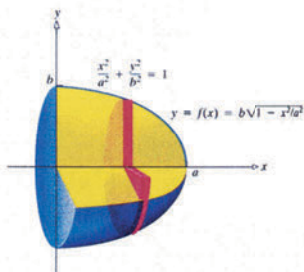
DISC METHOD



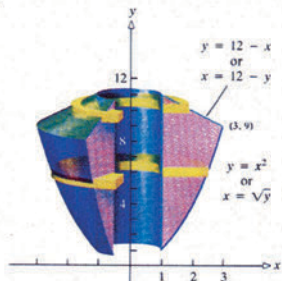
$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$



$$V = \int_0^3 \pi \left[(1)^2 - (-1 + \sqrt{1+y})^2 \right] dy = \frac{11\pi}{6}$$

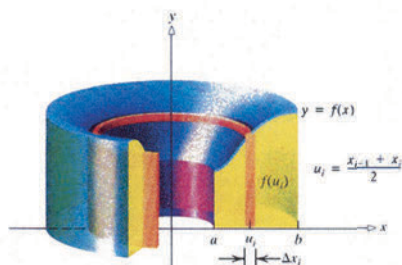


$$V = \int_0^a \pi \left(b\sqrt{1 - x^2/a^2} \right)^2 dx = \frac{2\pi ab^2}{3}$$

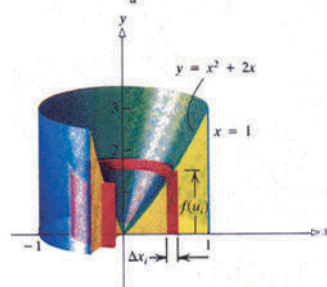


$$V = \left(\int_1^9 \pi (\sqrt{y})^2 dy + \int_9^{11} \pi (12 - y)^2 dy \right) - \int_1^{11} \pi (1)^2 dy = \frac{116\pi}{3}$$

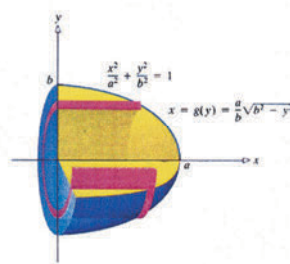
SHELL METHOD



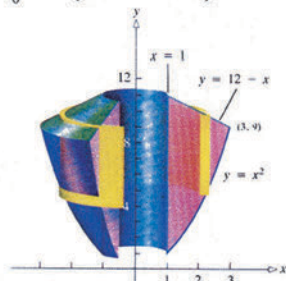
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$



$$V = \int_0^1 2\pi x (x^2 + 2x) dx = \frac{11\pi}{6}$$

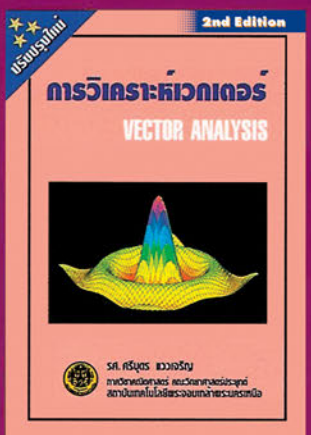
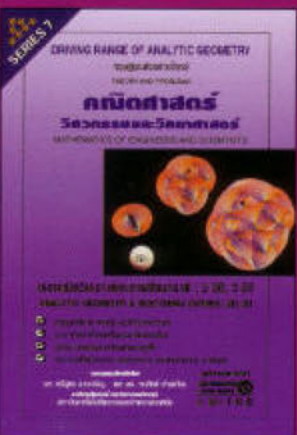
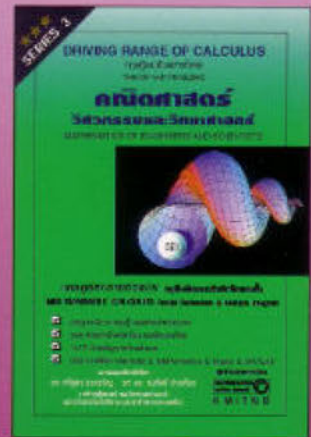
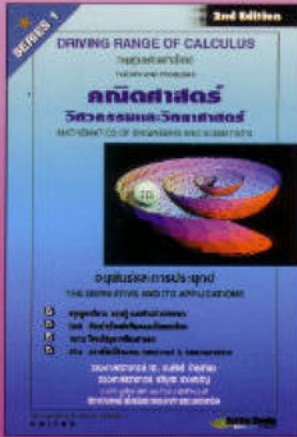


$$V = \int_0^b 2\pi y \left(\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \right) dy = \frac{2\pi ab^2}{3}$$



$$V = \int_1^3 2\pi x [(12 - x) - x^2] dx = \frac{116\pi}{3}$$

ผลงานของอาจารย์ผู้เขียนทั้งสองท่าน



SERIES 1, 2, 3 และ 7 เหมาะสำหรับนิสิต นักศึกษา ปีที่ 1
 SERIES 4, 5, 6 และ 8 เหมาะสำหรับนิสิต นักศึกษา ปีที่ 2
ISBN : 978-616-590-432-2

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย ตาม พ.ร.บ. ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2521
 ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

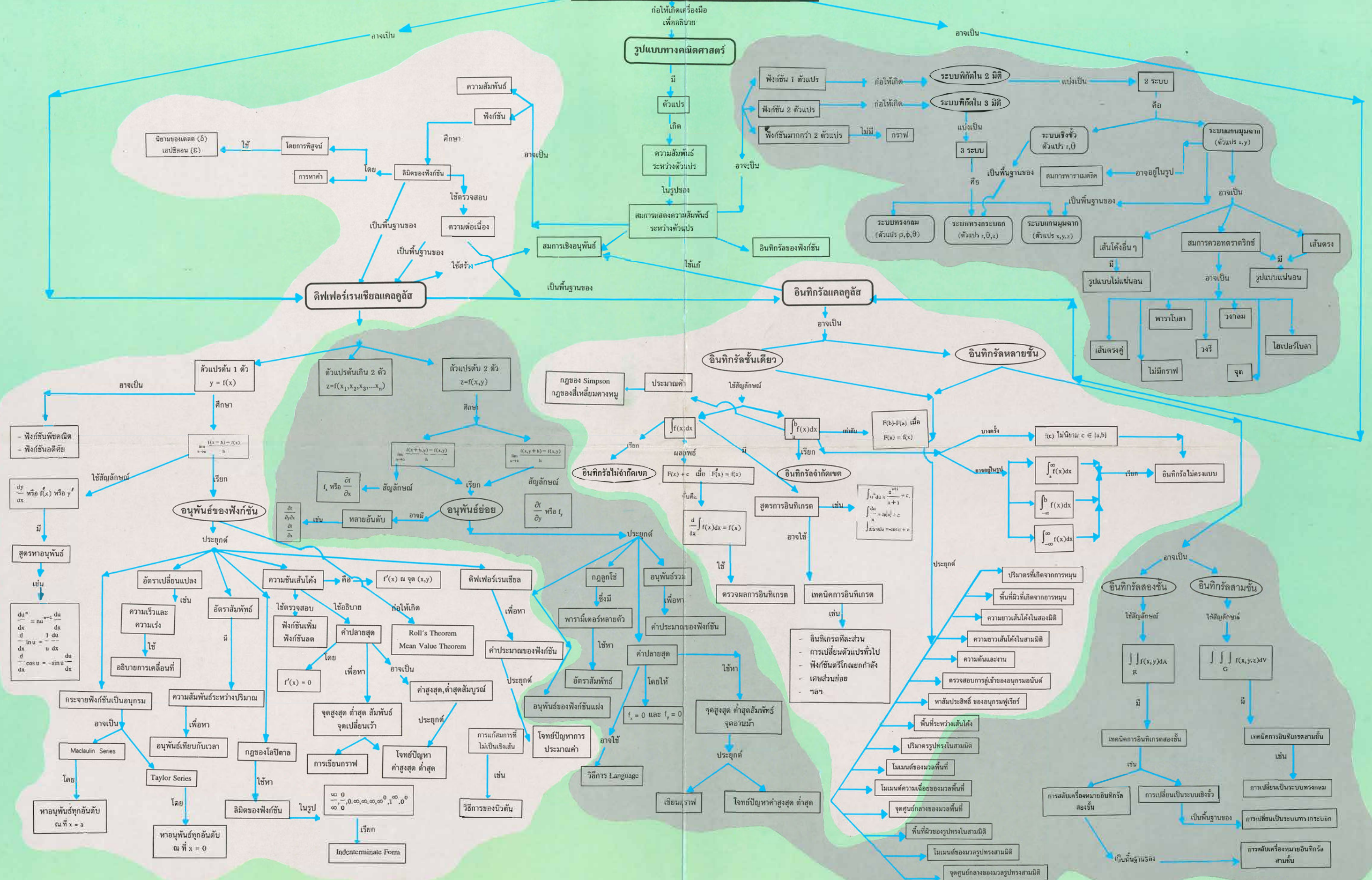
<http://www.series-books.com>

ISBN 974-94105-8-0



9 789749 410585

329.- (8.99 \$)



สูตรอนุพันธ์
(TABLE OF DERIVATIVES)

1. $\frac{d}{dx} c = 0$, c เป็นค่าคงที่
2. $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx} (u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$, $y = f(u)$, $u = g(x)$
7. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
10. $\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
17. $\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
18. $\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
19. $\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
20. $\frac{d}{du} \csc^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
21. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
22. $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \log_a e} \frac{du}{dx}$
23. $\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$
24. $\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$
25. $\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$
26. $\frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$
27. $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
28. $\frac{d}{dx} \operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$
29. $\frac{d}{dx} \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$
30. $\frac{d}{dx} \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
31. $\frac{d}{dx} \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$

สูตรทั่วไป
(GENERAL FORMULAS)

1. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$, c เป็นค่าคงที่
3. $\int u dv = uv - \int v du$ (IBP)

สูตรที่จำเป็น
(ESSENTIAL FORMULAS)

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$
3. $\int e^u du = e^u + C$
4. $\int \sin u du = -\cos u + C$
5. $\int \cos u du = \sin u + C$
6. $\int \tan u du = \ln |\sec u| + C$
7. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$
8. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
9. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$
11. $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$
12. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + C$

สูตรที่มีประโยชน์
(USEFUL FORMULAS)

13. $\int \cot u du = \ln |\sin u| + C$
14. $\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + C$
15. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
16. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
18. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
19. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
20. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
21. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
22. $\int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + C$
23. $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
24. $\int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(FORMS CONTAINING TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

84. $\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} + C$
85. $\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + C$
86. $\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$
87. $\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$
88. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
89. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
90. $\int \sin^3 u du = -\frac{1}{3} \cos^3 u + \frac{1}{3} \cos u + C$
91. $\int \cos^3 u du = \frac{1}{3} \sin^3 u + \frac{1}{3} \sin u + C$
92. $\int \tan^3 u du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln |\sec u| + C$
93. $\int \cot^3 u du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln |\csc u| + C$
94. $\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \tan u \sec u + \frac{1}{2} \ln |\sec u| + C$
95. $\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \cot u \csc u + \frac{1}{2} \ln |\csc u| + C$
96. $\int \sin mu \sin nu du = \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + C$, $m \neq \pm n$
97. $\int \cos mu \cos nu du = \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + \frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + C$, $m \neq \pm n$
98. $\int \sin mu \cos nu du = -\frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + \frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + C$, $m \neq \pm n$
99. $\int \sin u du = -\cos u + C$
100. $\int \cos u du = \sin u + C$

25. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
26. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
27. $\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b} \ln |a+bu| + C$
28. $\int \frac{u du}{a+bu} = \frac{1}{b^2} (a+bu - a \ln |a+bu|) + C$
29. $\int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \ln |a+bu| + \frac{1}{b} \frac{1}{a+bu} + C$
30. $\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a+bu}{a+bu} - \frac{a}{a+bu} - 2a \ln |a+bu| \right) + C$
31. $\int \frac{u du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2} \left(\frac{1}{a+bu} + \frac{a}{a+bu} \ln |a+bu| \right) + C$
32. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au^2} + \frac{b}{a^2} \ln |a+bu| + C$
33. $\int \frac{u du}{(a+bu)^n} = \frac{1}{b(n-1)} \left(\frac{a+bu}{a+bu} - \frac{a}{a+bu} \right) + C$, $n \neq 1$
34. $\int \frac{u du}{(a+bu)(c+du)} = \frac{1}{bc-ad} \left(\ln |a+bu| - \frac{c}{d} \ln |c+du| \right) + C$, $bc-ad \neq 0$
35. $\int \frac{u du}{(a+bu)^2(c+du)} = \frac{1}{bc-ad} \left(\frac{a}{a+bu} + \frac{c}{c+du} \right) + C$, $bc-ad \neq 0$
36. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$
37. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$
38. $\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{u}{a^2 \pm u^2} + (2n-2) \int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} \right)$, $n \neq 1$
39. $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{u}{u^2-a^2} - (2n-2) \int \frac{du}{(u^2-a^2)^{n-1}} \right)$, $n \neq 1$

อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
(FORMS CONTAINING INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

106. $\int \sin^{-1} u du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
107. $\int \cos^{-1} u du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
108. $\int \tan^{-1} u du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$
109. $\int \sin^{-1} u du = \frac{2u-1}{4} \sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
110. $\int \cos^{-1} u du = \frac{2u-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
111. $\int \tan^{-1} u du = \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$
112. $\int u^a \sin^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, $n \neq -1$
113. $\int u^a \cos^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, $n \neq -1$
114. $\int u^a \tan^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{1+u^2} \right)$, $n \neq -1$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a+bu}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a+bu}$)

40. $\int \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^3} (3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$
41. $\int u^a \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{b(2a+3)} \left[u^a(a+bu)^{3/2} - na \int u^{a-1} \sqrt{a+bu} du \right]$
42. $\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$
43. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3} (6a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$
44. $\int \frac{u^3 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^2\sqrt{a+bu}}{b(2a+1)} - \frac{2na}{b(2a+1)} \int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}}$
45. $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}}{u} \right| + C, a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, a < 0 \end{cases}$
46. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} + \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$
47. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$
48. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{u^2 \pm a^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{u^2 \pm a^2}$)

49. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
50. $\int u \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{3} (u^2 \pm a^2)^{3/2} + C$
51. $\int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
52. $\int \frac{u du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \sqrt{u^2 \pm a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} \right| + C$
53. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 \pm a^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
(EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FORMS)

115. $\int u^a e^u du = \frac{1}{a+1} (u^{a+1} e^u - \int u^{a+1} e^u du)$
116. $\int u^a e^{au} du = \frac{1}{a} u^a e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{a-1} e^{au} du$
117. $\int \frac{e^u}{u} du = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u}{u^{n-1}} du$
118. $\int \ln u du = u \ln u - u + C$
119. $\int (\ln u)^n du = u(\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1} du$
120. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \left(\ln u - \frac{1}{n+1} \right) + C$
121. $\int \frac{(\ln u)^n}{u} du = \frac{(\ln u)^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
122. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C$
123. $\int u^m (\ln u)^n du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \left(\ln u \right)^n - \frac{n}{m+1} \int u^m (\ln u)^{n-1} du$
124. $\int \frac{u^m}{(\ln u)^n} du = -\frac{u^{m+1}}{(n-1)(\ln u)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{u^m}{(\ln u)^{n-1}} du$
125. $\int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$
126. $\int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C$

อินทิกรัลของไฮเพอร์โบลิกฟังก์ชัน
(FORMS CONTAINING HYPERBOLIC FUNCTIONS)

127. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
128. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
129. $\int \tanh u du = \ln |\cosh u| + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{u^2 - a^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{u^2 - a^2}$)

62. $\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$
63. $\int u \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{1}{3} (u^2 - a^2)^{3/2} + C$
64. $\int \frac{u du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \sqrt{u^2 - a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 - a^2}}{u} \right| + C$
65. $\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{u + \sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right| + C$
66. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{u + \sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right| + C$
67. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 - a^2}}{u} \right| + C$
68. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$

130. $\int \coth u du = \ln |\sinh u| + C$
131. $\int \operatorname{sech} u du = \tan^{-1}(\sinh u) + C$
132. $\int \operatorname{csch} u du = \ln \left| \tanh \frac{u}{2} \right| + C$
133. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
134. $\int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + C$
135. $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
136. $\int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + C$
137. $\int \sinh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} - \frac{u}{2} + C$
138. $\int \cosh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2} + C$
139. $\int \tanh^2 u du = u - \tanh u + C$
140. $\int \coth^2 u du = u - \coth u + C$
141. $\int u \sinh u du = u \cosh u - \sinh u + C$
142. $\int u \cosh u du = u \sinh u - \cosh u + C$
143. $\int u^a \sinh u du = u^a \cosh u - n \int u^{a-1} \cosh u du$
144. $\int u^a \cosh u du = u^a \sinh u - n \int u^{a-1} \sinh u du$

อินทิกรัลที่มีเทอม $(a+be^{mu})^{-1}$
(FORMS CONTAINING $(a+be^{mu})^{-1}$)

145. $\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) = x - \ln(1+e^x) + C$
146. $\int \frac{dx}{a+be^{mx}} = \frac{1}{am} \left[m - \ln(a+be^{mx}) \right] + C$
147. $\int \frac{e^{mx}}{a+be^{mx}} dx = \frac{1}{mb} \ln(a+be^{mx}) + C$

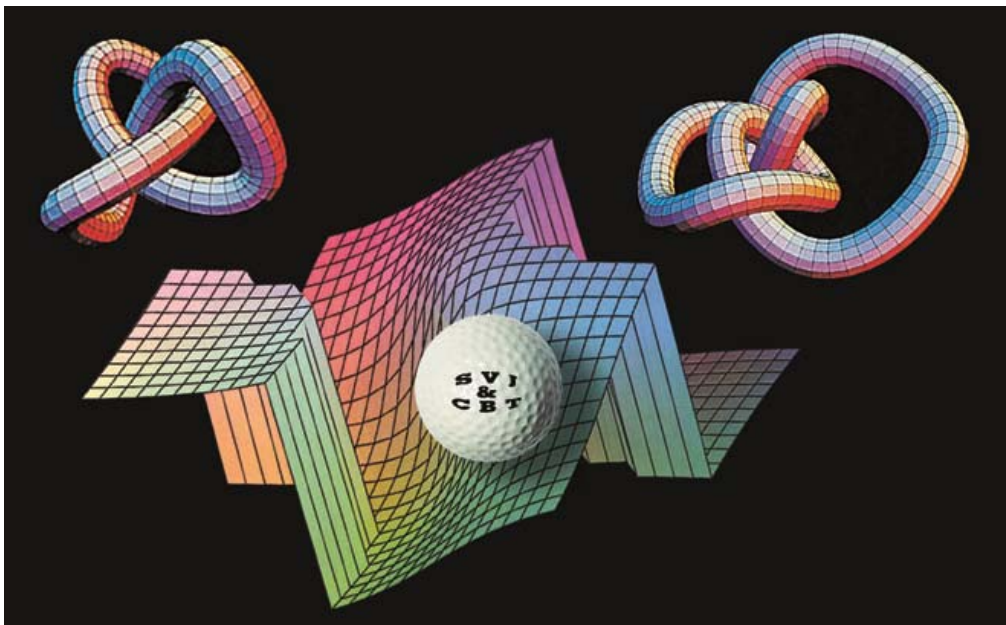


คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรและวิทยาศาสตร์
(MATHEMATICS OF ENGINEER AND SCIENTISTS)

Calculus: e-book:Series 2

อินทิกรัลและการประยุกต์

THE INTEGRAL AND ITS APPLICATIONS



รวบรวมและเรียบเรียงโดย

รศ. ศรีบุตร แววจริญ

รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ราคา 329 บาท (8.99 USD)

คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรและวิทยาศาสตร์ (MATHEMATICS OF ENGINEER AND SCIENTISTS)

อินทิกรัลและการประยุกต์ THE INTEGRAL AND ITS APPLICATIONS

Calculus: e-book:Series 2

ISBN 974-94105-8-0 สำหรับหนังสือ Series 2

ISBN(e-book) 978-616-590-432-2 สำหรับหนังสือ e-book:Series2 อินทิกรัลและการประยุกต์

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย พ.ร.บ.ลิขสิทธิ์ พศ. 2521

ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

วันวางจำหน่าย : 29-04-2022

ขนาดไฟล์ : 91.1 MB

จำนวนหน้า : 653 หน้า

ประเทศ : THAILAND

ประเภทไฟล์ : PDF

ภาษา : Thai

ออกแบบปกและ Artwork ทินพัฒน์ แวเจริญ ภาควิชาสถิติประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

รายละเอียดของผู้เขียนทั้งสองท่าน

จัดทำโดย

รศ.ศรีบุตร แวเจริญ และ รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

ชื่อหนังสือ e-book:Series 2 เล่มนี้

ราคา 329 บาท (8.99 USD)

การสั่งซื้อ e-book:Series 2 สามารถติดต่อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาทุกสาขา

รศ. ศรีบุตร แวเจริญ

Tel. 081-904-1608

ID Line sribudh

E-mail : swr@kmutnb.ac.th

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

Tel. 081-908-5090

ID Line mala0928

E-mail : chanasak.b@op.kmutnb.ac.th

คำนำ

การเรียนรู้แคลคูลัสกับการเล่นกีฬามีลักษณะคล้ายกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งกีฬากอล์ฟ “ไทเกอร์ วูดส์” นักกอล์ฟสายเลือดลูกครึ่ง ไทย-อเมริกัน ดังระเบิดไปทั่วโลก ด้วยประวัติการเรียนและกีฬากอล์ฟอันเยี่ยมยอด เป็นแชมป์กอล์ฟเยาวชนของสหรัฐหลายสมัย หลังการก้าวเข้าสู่กอล์ฟอาชีพเพียงเวลาไม่กี่เดือน ก็สามารถคว้าแชมป์กอล์ฟรายการใหญ่ได้หลายรายการ ด้วยวัยเพียง 21 ปี ด้านการเรียน มีผลการเรียนดีเยี่ยมสามารถเข้าเรียนในมหาวิทยาลัย ซึ่งเป็นมหาวิทยาลัยท็อปเทนของสหรัฐ ผู้เขียนอยากนำทั้งสองสิ่งมาหล่อหลอมเข้าด้วยกัน เพื่อให้บัณฑิต นักศึกษา และผู้สนใจในวิชาแคลคูลัสได้มองภาพในอนาคตได้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้น โดยนำกีฬากอล์ฟมาอธิบายเปรียบเทียบ หนังสือเล่มนี้ได้ตั้งชื่อว่า “ **สนามฝึกซ้อมวิชาแคลคูลัส** ” (Driving Range of Calculus) เช่นเดียวกับกีฬากอล์ฟซึ่งมี **สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ** (Driving Range of Golf) ก่อนที่จะเข้าสนามฝึกซ้อมคงต้องศึกษานิยามทฤษฎี และคุณสมบัติต่างๆ จากห้องเรียนจนเข้าใจดีพอ แล้วจึงนำหนังสือเล่มนี้มาฝึกฝนให้เกิดความเข้าใจให้ดียิ่งขึ้น

หนังสือเล่มนี้ได้ใช้เทคโนโลยีสมัยใหม่ มาช่วยทำให้รูปแบบของหนังสือมีคุณค่ายิ่งขึ้น โดยใช้โปรแกรม **Mathcad Maple และ Mathematica** ซึ่งทำให้ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ สามารถมองเห็นโจทย์ปัญหานั้นๆ ได้เป็นรูปธรรมมากขึ้น

แคลคูลัสเป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งของสาขาคณิตศาสตร์ และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาไปใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาต่างๆ ของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ ใช้ได้ดี นิสิตนักศึกษา จำเป็นต้องศึกษาวิชาพื้นฐานให้เข้าใจถ่องแท้ก่อน จากประสบการณ์ด้านการสอนมาเกือบ 40 ปี ในสถาบันแห่งนี้ และเป็นอาจารย์พิเศษมหาวิทยาลัยอีกหลายแห่ง จึงได้รวบรวมเขียนออกมาเป็น**แผนที่วิชาแคลคูลัสพื้นฐาน (Calculus Concept Maps)** ตามที่นำเสนอในปกหลังด้านในของหนังสือเล่มนี้นั้น ผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น **e-Book:Series 1-8** โดยแต่ละ **Series** จะมีเนื้อหาความสัมพันธ์กันเกี่ยวข้องกันอยู่ตลอดเวลา ดังนั้น การศึกษาวิชาแคลคูลัสจำเป็นต้องมีพื้นฐานของคณิตศาสตร์ **e-Book:Series** ต้นๆ อยู่ตลอดเวลา

ทางด้านกีฬากอล์ฟนั้นผู้เขียนได้มีโอกาสรับการฝึกอบรมจากคุณครูกอล์ฟ **Bell Penny** (Head Professional-Class A C.P.G.A.) จากโรงเรียนการศึกษากอล์ฟไทย ซึ่งเป็นโรงเรียนกอล์ฟแห่งแรกของประเทศไทย เมื่อปี 1994 ทำให้ผู้เขียนได้เกิดแนวคิดที่จะนำทั้งสองเรื่องนี้ คือ แคลคูลัสและกอล์ฟมา

ผนวกเข้าด้วยกัน ซึ่งมีหลายๆ สิ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบให้นิสิต นักศึกษา ได้มองเห็นภาพการศึกษา แคลคูลัสได้ดียิ่งขึ้นในกีฬากอล์ฟนั้นเราแบ่งโฟร์ออกเป็น 3 โฟร์ เรียงลำดับตามความสามารถได้ดังนี้ คือ โฟร์ C มือใหม่ (Beginner) , โฟร์ B มือสมัครเล่น (Amateur) , โฟร์ A มืออาชีพ (Professional)

การเล่นกอล์ฟนั้น ในการออกรอบ 1 รอบ หรือตีจนครบ 18 หลุมนั้น ต้องใช้ความอดทน ความพยายาม มีจิตใจที่มุ่งมั่น การเล่นกอล์ฟจะต้องแก้ปัญหาเฉพาะหน้าตลอดเวลาและรูปแบบของปัญหานั้นเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอผู้เล่นต้องคิดแก้ปัญหาด้วยตัวเองบนพื้นฐานของประสบการณ์ที่มีอยู่ เมื่อถึงจุดหนึ่งผู้เล่นที่มีพื้นฐานและการฝึกซ้อมดีพอ ผู้เล่นจะสามารถแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้เสมอ โดยที่ผู้เล่นจะต้องนำปัจจัยหลายๆ อย่างมาช่วยในการคิดแก้ปัญหา

ในวิชาแคลคูลัสก็เช่นเดียวกัน เป็นวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์หลายๆ ด้านมาประกอบกัน เพื่อช่วยในการคิดแก้ปัญหา ผู้เขียนจึงได้เขียนปูพื้นตั้งแต่เริ่มต้น ตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแต่จะลึกลงไปในแต่ละเรื่องมากกว่าเดิม นักศึกษาที่พื้นฐานยังไม่ดีพอจึงเปรียบเสมือนนักกอล์ฟมือใหม่ ต้องฝึกทำโจทย์ตั้งแต่ต้นในเรื่องพื้นฐานจนเกิดความเข้าใจก่อน จึงจะเริ่มศึกษาในเนื้อหาของวิชาแคลคูลัสได้ เมื่อผู้เรียนฝึกซ้อมจนเข้าใจแล้วจึงจะถือว่าอยู่ในระดับมือสมัครเล่น และนักศึกษาจะต้องทำการฝึกฝนต่อไปอีกจนเกิดความเข้าใจ จึงจะถือว่านักศึกษาจัดอยู่ในขั้นระดับมืออาชีพ จึงจะสามารถศึกษาในขั้นประยุกต์ได้ ในคำราชนัดนี้เปรียบเสมือนสนามฝึกซ้อม มีโจทย์ตัวอย่างมากมายเพียงพอที่จะทำให้นักศึกษาพัฒนาตนเองอยู่ในขั้นมืออาชีพได้อย่างสบาย

หนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 2 ก่อนที่จัดทำเป็น e-book:Series 2 ได้ปรับปรุงมาแล้ว2ครั้ง โดยทำการปรับปรุงจากหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 2 จะเน้นในเรื่อง อินทิกรัล และการประยุกต์ โดยปรับปรุง จากการจัดพิมพ์ครั้งแรกในปี 2540 มีการเพิ่มเนื้อหาและรูปภาพของฟังก์ชันอีกมากมาย รวมทั้งรูปเล่ม ตัวหนังสือเป็นสีน้ำเงิน เพื่อให้ดูชัดเจน และสวยงาม นอกจากนี้ผู้เขียนได้เพิ่มตัวอย่างพร้อมแสดงวิธีทำโดยละเอียดที่น่าสนใจจากเดิม รวมตัวอย่างโจทย์เป็น 555 ตัวอย่าง และเพิ่มโจทย์ปัญหาพร้อมคำเฉลย เป็น 1,571 ข้อ และใช้โปรแกรม Maple และ Mathcad วาดกราฟ ทั้งหมดเป็น 216 รูป เพื่อให้ นักศึกษาได้เห็นเป็นรูปธรรมนามธรรมยิ่งขึ้น และเกิดความเข้าใจลึกซึ้ง โดยดูจากกราฟของฟังก์ชันจริง โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในส่วนเฉลยคำตอบเดิมได้ย่อหน้าให้เหลือ 50% ทำให้คำเฉลยดูไม่ขัดเจน ผู้เขียนได้ขยายเป็น 100% เพื่อให้ผู้อ่านได้ตรวจคำตอบได้สะดวกขึ้น จากการเพิ่มข้อมูลต่างๆ ทำให้จำนวนหน้าเพิ่มขึ้นอีกมากกว่าเดิม 572 หน้า เป็น 638 หน้า นักศึกษาได้ฝึกทบทวนเนื้อหาและทดลองทำแบบฝึกหัดในลักษณะต่างๆทำให้เกิด

ความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีให้ถ่องแท้ อันจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนการสอน และการทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพในอนาคต ถ้าจะให้หนังสือเล่มนี้เปรียบเทียบกับกีฬาอล์ฟผู้เขียนตั้งใจจะให้เป็นอย่างสนามฝึกซ้อมกอล์ฟ (Driving Range) ถ้าใครเข้าสนามฝึกซ้อมมากก็จะทำให้พัฒนาดียิ่งขึ้น แล้วจะส่งผลให้นิสิต-นักศึกษา ข้อสอบกลางภาค (Midterm) และสอบปลายภาค (Final) ด้วยความมั่นใจ เช่นเดียวกับนักกอล์ฟที่มีความพร้อม และมีความเชื่อมั่นที่ลงสนามแข่งขัน

ผู้เขียนขอกราบขอบคุณคุณครู-อาจารย์ทุกท่าน ตั้งแต่ประถมจนถึงมหาวิทยาลัยที่ได้ประสิทธิภาพให้ ขอกราบขอบคุณทุกท่านที่ได้ให้การสนับสนุนหนังสือตั้งแต่ **e-book:Series 2** ถึง **e-book:Series8**ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานทุกคนที่ได้คอยให้ กำลังใจและให้คำแนะนำด้วยดีมาตลอดขอขอบคุณคุณฉัตรสุมาลย์ลากเวณีที่ทุ่มเทช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้ เป็นอย่างดีและขอบคุณนักศึกษาของภาควิชา คณิตศาสตร์ที่ได้ช่วยตรวจต้นฉบับให้เป็นอย่างดี และที่สำคัญที่สุดขอขอบคุณและขอใจ ภรรยา และลูกๆ ของผู้เขียนทั้งสอง : คุณยุพิน แวเวจริญ ลูกแพรวและลูกเพชร คุณวงษ์เดือน บ่ายเที่ยง ลูกต๋มและลูกต๋ี่ ที่ได้ให้กำลังใจในการเขียนมาตลอดและเป็นผู้อยู่เบื้องหลังของความสำเร็จในการจัดทำนี้

หนังสือ **e-book:Series 2** อนุพันธ์และการประยุกต์ ปรับปรุงใหม่เล่มนี้จะไม่สามรถเกิดขึ้นได้ ถ้าไม่มีผู้บริหาร โดยเฉพาะ รศ.ดร.ฐิตนนท์ จารุโรจน์กิริติ คณบดีคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ และเพื่อนร่วมงาน ในภาควิชาคณิตศาสตร์และนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์ทั้งในอดีตและปัจจุบัน ดังเช่น นส.อุมารัตน เทพี (MA12) นส. บุปผา จิตรโสม (MA20) ที่ทุ่มเทเวลาช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดีท้ายสุดนี้ขอขอบใจ นาย ทินพัฒน์ แวเวจริญ (AS 23) ของ มจพ. (KMUTNB) ที่ช่วยออกแบบปก และ Artwork ของ **e-book:Series 2** เล่มนี้ทั้งหมด

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือประกอบการเรียนเล่มนี้ คงจะเป็นประโยชน์ต่อนิสิต นักศึกษา ในสถาบันอุดมศึกษาต่างๆ บ้างตามสมควรหากพบข้อบกพร่องที่ควรแก้ไขในหนังสือเล่มนี้ กรุณาเสนอแนะให้ผู้เขียนทราบด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง ขอให้ แฟนพันธ์แท้ และผู้สนใจคอยติดตาม **e-book:Series 2** ต่อไป

คุณความดีและคุณประโยชน์ ทั้งหลายทั้งปวง ขอมอบให้บิดา – มารดา ครู-อาจารย์ ของผู้เขียนทั้งสอง

รศ. ศรีบุตร แวเวจริญ

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

คำนิยม

ท่านผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ทุกท่าน ผมได้ติดตามวิธีคิดและการทำหนังสือ SERIES 1-8 ของอาจารย์ทั้งสองท่าน คือ รศ. ศรีบุตร แววจริญ และ รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง มาโดยตลอด ซึ่งได้จัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ SERIES ออกมาแล้ว 8 เล่มรวมทั้งปรับปรุงหนังสือคณิตศาสตร์ SERIES 1-8 มาโดยตลอด หนังสือคณิตศาสตร์ เล่มนี้เป็นการปรับปรุงหนังสือ Series 2 ได้อยู่ในรูปแบบ e-book Series 2 มีการนำเอาโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Maple และ Mathcad มาช่วยให้การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สามารถทำความเข้าใจได้ง่ายขึ้น ผมเองตอนที่เป็นักเรียน/นักศึกษาเวลาทำการบ้านคณิตศาสตร์ต้องหาให้ได้คำตอบและต้องถูกต้องแต่มั่นใจว่าคำตอบที่ถูกต้องนั้นในสมัยก่อน ต้องตรวจสอบที่ท้ายเล่มเท่านั้น

ในปัจจุบันวิวัฒนาการทางคอมพิวเตอร์มีมากขึ้น ท่านอาจารย์ทั้งสองท่านก็มียอมให้การเรียนรู้ด้านคณิตศาสตร์เป็นแบบเดิมหรืออยู่อยู่กับที่ได้พัฒนาการเรียนรู้โดยการนำโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแสดงวิธีทำและหาคำตอบ และได้สอดแทรกการแก้ปัญหาโดยโปรแกรมสำเร็จรูปในหนังสือเล่มนี้ด้วย

ผมเองได้เห็น ความบากบั่น ความพยายามของอาจารย์ทั้งสองท่าน ที่พยายามช่วยให้การเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่ไม่ยุ่งยากอีกต่อไป และในฐานะของผู้บริหารคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ต้องขอขอบคุณและ อยากให้มีหนังสือแบบนี้มากขึ้นในหลายสาขาวิชาของคณะเพื่อการเรียนรู้ในวิชาของคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์สามารถทำให้นักศึกษาหรือผู้อ่านได้เข้าใจในเนื้อหาของวิชานั้นอย่างดี

ขอบคุณครับ



รองศาสตราจารย์ ดร. วิตนถ จารุโรจนักริ
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

แถมฟรี

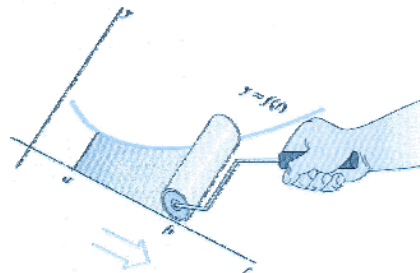
e-book:Series 2 เล่มนี้ ผู้เขียนได้มอบแผ่นพับขนาด A3 รูป4สีสวยงามจำนวน 2 แผ่นที่จะเป็นประโยชน์กับนักศึกษาและผู้สนใจวิชา CALCULAS เป็นอย่างดี

1. CALCULUS CONCEPT MAPS

2. FORMULA TABLES OF DERIVATIVES AND INTEGRALS

สารบัญ

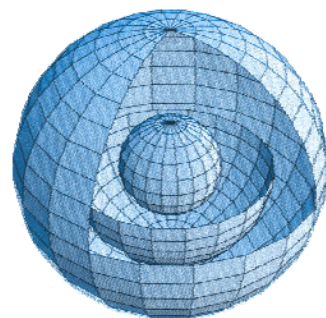
บทที่ 1 การอินทิเกรต (Integration)



1.1	บทนำ (Introduction)	1 -2
1.2	ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivatives)	2 -3
1.3	อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)	4 -7
1.4	พื้นที่ (Area)	8 -19
1.5	สัญลักษณ์ผลรวม (Summation Notation)	20-24
1.6	การหาพื้นที่ในรูปการหาขีดจำกัดของผลรวม (Area as the Limit of a Sum)	25-30
1.7	สูตรของผลรวมบนและผลรวมล่าง (Formulas for Upper and Lower Sums)	31-35
1.8	ผลรวมรีมานน์ (Riemann Sum)	36-37
1.9	อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral)	38-46
1.10	คุณสมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต (Properties of Definite Integral)	47-50
1.11	การหาค่าอินทิเกรต (Evaluation of Integral)	51-56
1.12	ทฤษฎีพื้นฐานสำหรับแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus)	57-61
1.13	ทฤษฎีค่าเฉลี่ยสำหรับอินทิกรัล (Mean – Value Theorem for Integral)	62-72

บทที่ 2

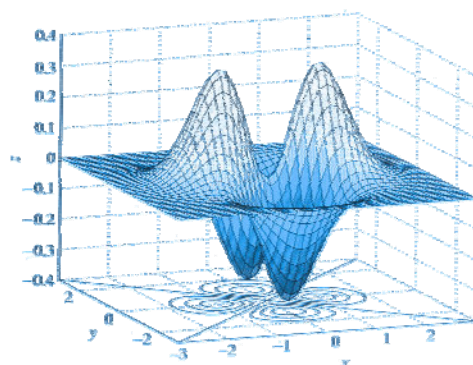
ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียล
และฟังก์ชันอดิศัย
(The Logarithmic Functions ,
The Exponential Functions
and The Transcendental Functions)



2.1	ฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ และการหาอนุพันธ์ (The Natural Logarithmic Function and Differentiation)	73-79
2.2	ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ และการอินทิเกรต (The Natural Logarithmic Function and Integration)	80-83
2.3	ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Functions)	84-93
2.4	ฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียล การหาอนุพันธ์และการอินทิเกรต (Exponential Functions : Differentiation and Integration)	94-101
2.5	อินทิกรัลของฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียล(Integrals of Exponential Functions)	102-104
2.6	อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Integrals of Trigonometric Functions and Inverse of Trigonometric Functions)	105-111
2.7	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน (Hyperbolic Functions and Inverse Hyperbolic Functions)	112-132

บทที่ 3

เทคนิคการอินทิเกรต (Techniques of Integration)

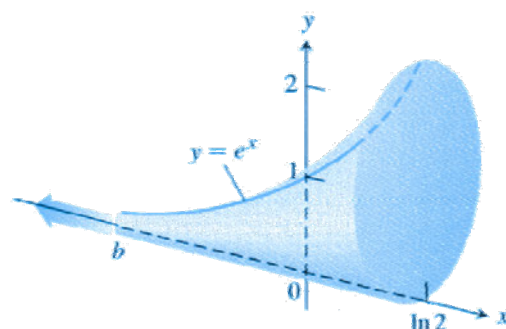


3.1	ตารางอินทิเกรต (Integral Tables)	133-135
3.1.1	การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร u (Integration by u-Substitution)	136-138
3.1.2	การอินทิเกรตโดยใช้สูตรพื้นฐาน (Integration of Basic Formulas)	139-152
3.1.3	การใช้สูตรต่างๆ ในตารางสูตรการอินทิเกรต (Integration of Table Integral Formulas)	153-160
3.2	การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts ; IBP)	161-187
3.3	การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง (Power of Trigonometric Functions)	188-220

3.4	การอินทิเกรตโดยใช้แทนด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (substitution by Trigonometric Functions Integrals Containing $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ or $\sqrt{a^2 + x^2}$)	221-246
3.5	การอินทิเกรตโดยใช้เศษส่วนย่อย (Partial Fractions)	247-286
3.6	การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของ $\sin x$ และ $\cos x$ (Integrals Containing Rational Expressions in $\sin x$ and $\cos x$)	287-295
3.7	การเปลี่ยนตัวแปร (Change of Variables)	296-331
3.8	การอินทิเกรตโดยตารางสูตรอินทิเกรต (Integration by Integral Tables)	332-354

บทที่ 4

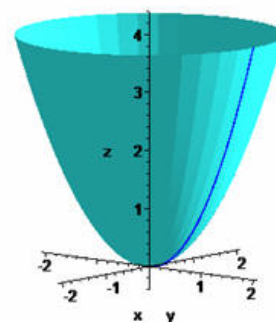
อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)



4.1	ช่วงของการอินทิเกรตไม่มีขอบเขต (Unbounded Integrals of Integrations)	355-368
4.2	ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตไม่มีขอบเขตที่บางจุดในช่วง $[a, b]$ (Unbounded Integrands) วิธีเปรียบเทียบ (Limit Comparison Test)	369-379 380-386

บทที่ 5

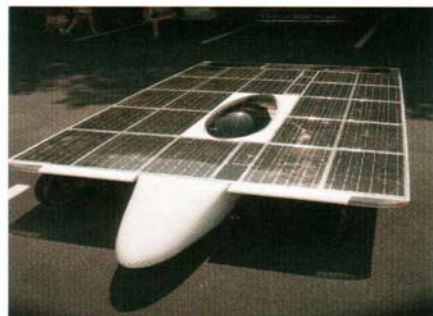
การประยุกต์ของอินทิเกรต (Applications of Integration)



5.1	พื้นที่ (Area)	
5.1.1	พื้นที่ของบริเวณระหว่างเส้นโค้งสองเส้น (Area of a Region Between Two Curves)	387-400
5.1.2	พื้นที่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (Area in Polar Coordinates)	401-418
5.2	ปริมาตรของรูปทรงตัน (Volume of Solids)	
5.2.1	ปริมาตรโดยการเลื่อยชิ้นบางๆ (Volume by Slicing)	419-431
5.2.2	ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน โดยวิธีจาน (Volume of a Solid of Revolution : Disc Method)	432-456
5.2.3	ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก (Volume of a Solid of Revolution : Shell Method)	457-487
5.3	ความยาวของเส้นโค้ง (Area Length)	488-511
5.4	พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน (Area of Surface of Revolution)	512-538
5.5	โมเมนต์และจุดศูนย์กลางของมวล (Moment and Center of Mass)	539-572
5.6	ความดันของไหลและแรงของไหล (Fluid Pressure and Fluid Force)	573-587
5.7	งาน (Works)	588-594

บทที่ 6

การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration)



6.1	กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)	595-601
6.2	กฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule)	602-615
6.3	การอินทิเกรตโดย CAS (Integration by CAS)	616-622

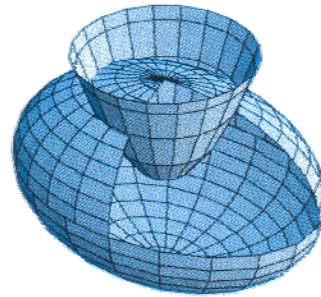
เฉลยแบบฝึกหัด (Solution)	623-636
-----------------------------------	---------

ภาคผนวก (Appendices) สูตรจุดศูนย์กลางของมวล	637
บรรณานุกรม	638
สรุปสูตรอนุพันธ์และอินทิเกรต	ใบแทรกปกหลัง

บทที่ 1

การอินทิเกรต

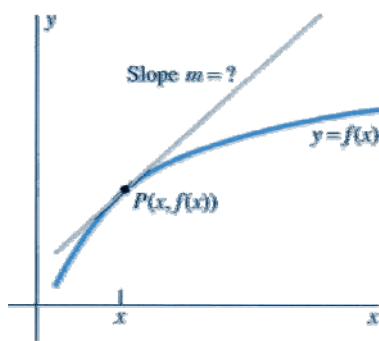
(Integration)



1.1 บทนำ (Introduction)

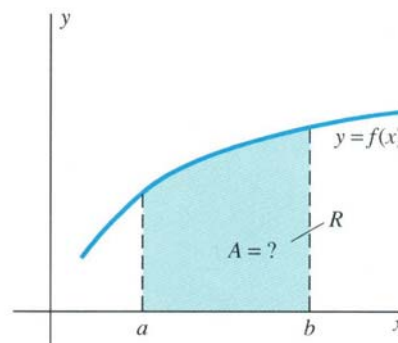
ดิฟเฟอเรนเชียลแคลคูลัส (Differential Calculus) จะเน้นแนวคิดหลักในเรื่องของอนุพันธ์ (Derivatives) โดยแนวคิดพื้นฐานจะเริ่มต้นจากปัญหาการให้ความหมายของเส้นตรงสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน และการคำนวณค่าความชันของเส้นตรงที่สัมผัสเหล่านั้น รูป 1.1 ความสำคัญของเรื่องอนุพันธ์จะนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาต่างๆ มากมาย ขึ้นอยู่กับที่มาของปัญหา แต่อย่างไรก็ตามดูเหมือนว่าทุกปัญหาจะสามารถอธิบายให้เชื่อมโยงกับเรื่องเส้นสัมผัสได้เสมอ

อินทิกรัลแคลคูลัส (Integral Calculus) จะเน้นแนวคิดหลักในเรื่องของอินทิกรัล (Integral) โดยนิยามของอินทิกรัลจะใช้แนวคิดพื้นฐานจากปัญหาเกี่ยวกับความหมายและการคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่มีค่าเป็นบวก (Positive Value Function) f และแกน x บนช่วงปิด $[a, b]$ พื้นที่ของบริเวณ R รูป 1.2 จะถูกกำหนดให้อยู่ในรูปของอินทิกรัลจาก a ไปยัง b และแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$



ปัญหาเส้นสัมผัสของเส้นโค้งจะเกี่ยวข้องกับ
ดิฟเฟอเรนเชียลแคลคูลัส

รูป 1.1



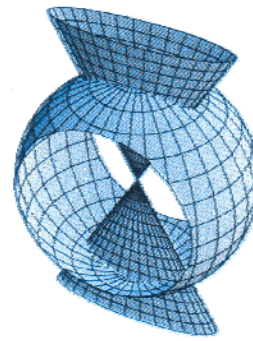
ปัญหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งจะเกี่ยวข้องกับ
อินทิกรัลแคลคูลัส

รูป 1.2

ตัวอย่างการหาอินทิกรัลของ $f(x)$ ที่กำหนดให้			
ตัวอย่าง 1.1	จงหา $F(x)$ ซึ่งเป็นอินทิกรัลของ $f(x)$ ที่กำหนดให้ในข้อต่อไปนี้		
	$f(x)$	อินทิกรัลของ $f(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + C$
1	$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$\int kdx = kx + C$
2	$f(x) = 5x^4$	$F(x) = x^5$	$\int 5x^4 dx = x^5 + C$
3	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{3}{4}x^{4/3}$	$\int \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$
4	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
5	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
6	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
7	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
8	$f(x) = \operatorname{sech}^2 x$	$F(x) = \tanh x$	$\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$
9	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \sin^{-1} x$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$
10	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$F(x) = \cosh^{-1} x$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \cosh^{-1} x + C$
จากตัวอย่าง 1.1 ที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าการอินทิเกรตและการอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีความสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิด เราสามารถพิสูจน์การอินทิเกรต โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผลลัพธ์แล้วให้ได้เท่ากับตัวอินทิเกรต นั่นคือ $\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad F'(x) = f(x)$ (1.5)			
ตัวอย่าง 1.2	ก. จงแสดงว่า $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x (\cos x + \sin x) + C$ ข. จงแสดงว่า $\int \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} dx = \frac{\tan x}{1 + \tan x} + C$		
	วิธีทำ ก. ในที่นี้ ตัวอินทิเกรต $f(x) = e^x \cos x$ และผลลัพธ์ของการอินทิเกรต $F(x) = \frac{1}{2}e^x (\cos x + \sin x)$		

บทที่ 2

ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียล และฟังก์ชันอดิศัยอื่น ๆ



2.1 ฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ และการหาอนุพันธ์ (The Natural Logarithmic Function and Differentiation)

ในสูตรอินทิเกรตเบื้องต้น เรานึกได้ถึงสูตรยกกำลังที่กล่าวว่า

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

ที่มีความสำคัญมาก แต่ไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้เมื่อ $n = -1$ เพราะฉะนั้น เราไม่มีทางพบปฏิยานุพันธ์สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ ในหัวข้อนี้ เราจะใช้ทฤษฎีเบื้องต้นที่สองของแคลคูลัส เพื่อนิยามฟังก์ชันดังกล่าว ปฏิยานุพันธ์นี้เป็นฟังก์ชันซึ่งเราไม่เคยพบมาก่อนในคณิตศาสตร์เล่ม 2 นี้ มันไม่เป็นพีชคณิตและตรีโกณมิติ แต่ตกอยู่ในกลุ่มใหม่ของฟังก์ชันเรียกว่า ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันเฉพาะนี้คือ **ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Logarithmic Functions)**

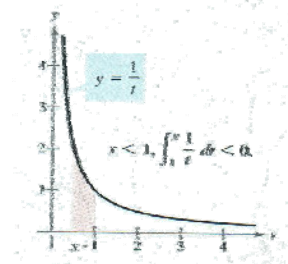
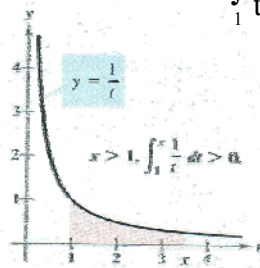
นิยาม 2.1

ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ กำหนดโดย $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad 0 < x$

โดเมนของฟังก์ชันลอการิทึม เป็น เซตของจำนวนจริงบวกทั้งหมด

ยิ่งไปกว่านั้น
 $\ln(1) = 0$
เพราะว่าลิมิตบน
และลิมิตล่างของ
การอินทิเกรต
เท่ากัน เมื่อ
 $x = 1$

สำหรับนิยามนี้ เราสามารถเห็นได้ว่า $\ln x$ เป็นบวก เมื่อ $x > 1$ และ $\ln x$ เป็นลบ เมื่อ $0 < x < 1$ เนื่องจาก $\int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt$ ดังแสดงในรูป 2.1

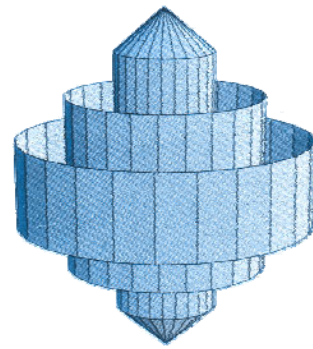


รูป 2.1

ตาราง 2.1	<table><tr><td>x</td><td>$\frac{1}{e^3} \approx 0.050$</td><td>$\frac{1}{e^2} \approx 0.135$</td><td>$\frac{1}{e} \approx 0.368$</td><td>$e^0 = 1$</td><td>$e \approx 2.718$</td><td>$e^2 \approx 7.389$</td></tr><tr><td>ln x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	x	$\frac{1}{e^3} \approx 0.050$	$\frac{1}{e^2} \approx 0.135$	$\frac{1}{e} \approx 0.368$	$e^0 = 1$	$e \approx 2.718$	$e^2 \approx 7.389$	ln x	-3	-2	-1	0	1	2			
x	$\frac{1}{e^3} \approx 0.050$	$\frac{1}{e^2} \approx 0.135$	$\frac{1}{e} \approx 0.368$	$e^0 = 1$	$e \approx 2.718$	$e^2 \approx 7.389$												
ln x	-3	-2	-1	0	1	2												
	ค่าของลอการิทึมให้ในตาราง 2.1 สะดวกในการนำไปใช้ เพราะค่าของ x เป็นกำลังจำนวนเต็มของ e อย่างไรก็ตามสำหรับค่าของอื่นๆ ที่มากกว่านี้ ทางที่ดีที่สุดในการหาค่าเป็นการคำนวณจากเครื่องคำนวณ																	
ตัวอย่าง 2.2	ค่าของลอการิทึมธรรมชาติที่ได้จากเครื่องคำนวณที่น่าสนใจ																	
	<table><tr><td>ก. ln 1 = 0</td><td>ข. ln 2 ≈ 0.693</td></tr><tr><td>ค. ln 32 ≈ 3.466</td><td>ง. ln 0.1 ≈ -2.303</td></tr></table>						ก. ln 1 = 0	ข. ln 2 ≈ 0.693	ค. ln 32 ≈ 3.466	ง. ln 0.1 ≈ -2.303								
ก. ln 1 = 0	ข. ln 2 ≈ 0.693																	
ค. ln 32 ≈ 3.466	ง. ln 0.1 ≈ -2.303																	
	อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ (The Derivative of the Natural Logarithmic Function)																	
	อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมมีให้ในทฤษฎี 2.2 ในส่วนแรกของทฤษฎีได้จากรูปแบบของฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติเป็นปฏิยานุพันธ์ ในส่วนที่สองของทฤษฎีทำให้ง่ายขึ้นด้วยใช้กฎลูกโซ่จากส่วนแรก																	
ทฤษฎี 2.3	ให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x																	
	<table><tr><td>1. $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$, x > 0</td><td>2. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$, u > 0</td></tr></table>						1. $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$, x > 0	2. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$, u > 0										
1. $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$, x > 0	2. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$, u > 0																	
ตัวอย่าง 2.3	จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติต่อไปนี้																	
	<table><tr><td>ก. y = ln (2x)</td><td>ข. y = ln(x² + 1)</td></tr><tr><td>ค. y = x ln x</td><td>ง. y = (ln x)³</td></tr></table>						ก. y = ln (2x)	ข. y = ln(x ² + 1)	ค. y = x ln x	ง. y = (ln x) ³								
ก. y = ln (2x)	ข. y = ln(x ² + 1)																	
ค. y = x ln x	ง. y = (ln x) ³																	
	<table><tr><td>วิธีทำ ก.</td><td>$\frac{d}{dx}[\ln(2x)] = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$</td><td>u = 2x</td></tr><tr><td>วิธีทำ ข.</td><td>$\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2 + 1}$</td><td>u = x² + 1</td></tr><tr><td>วิธีทำ ค.</td><td>$\frac{d}{dx}[x \ln x] = x\left(\frac{d}{dx}[\ln x]\right) + (\ln x)\left(\frac{d}{dx}[x]\right)$ $= x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$ $= 1 + \ln x$</td><td>สูตรผลบวกของอนุพันธ์</td></tr><tr><td>วิธีทำ ง.</td><td>$\frac{d}{dx}[(\ln x)^3] = 3(\ln x)^2 \frac{d}{dx}[\ln x]$ $= 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$</td><td>กฎลูกโซ่</td></tr></table>						วิธีทำ ก.	$\frac{d}{dx}[\ln(2x)] = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$	u = 2x	วิธีทำ ข.	$\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2 + 1}$	u = x ² + 1	วิธีทำ ค.	$\frac{d}{dx}[x \ln x] = x\left(\frac{d}{dx}[\ln x]\right) + (\ln x)\left(\frac{d}{dx}[x]\right)$ $= x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$ $= 1 + \ln x$	สูตรผลบวกของอนุพันธ์	วิธีทำ ง.	$\frac{d}{dx}[(\ln x)^3] = 3(\ln x)^2 \frac{d}{dx}[\ln x]$ $= 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$	กฎลูกโซ่
วิธีทำ ก.	$\frac{d}{dx}[\ln(2x)] = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$	u = 2x																
วิธีทำ ข.	$\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2 + 1}$	u = x ² + 1																
วิธีทำ ค.	$\frac{d}{dx}[x \ln x] = x\left(\frac{d}{dx}[\ln x]\right) + (\ln x)\left(\frac{d}{dx}[x]\right)$ $= x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$ $= 1 + \ln x$	สูตรผลบวกของอนุพันธ์																
วิธีทำ ง.	$\frac{d}{dx}[(\ln x)^3] = 3(\ln x)^2 \frac{d}{dx}[\ln x]$ $= 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$	กฎลูกโซ่																

ตัวอย่าง 2.4	จงหา y' ถ้า ก. $y = \ln(\sqrt{x+1})$ ข. $y = \ln(\sqrt{x^2+1})$ ค. $y = \sin(\ln x)$ ง. $\ln x + \ln y = 2x$
	วิธีทำ ก. เพราะว่า $y = \ln \sqrt{x+1} = \ln(x+1)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(x+1)$ ดังนั้น $y' = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln(x+1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2(x+1)} \quad u = x+1$ วิธีทำ ข. เพราะว่า $y = \ln \sqrt{x^2+1} = \ln(x^2+1)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$ โดยกฎลูกโซ่ เราให้ $y = \frac{1}{2} \ln u$ และ $u = x^2+1$ จะได้ว่า $y' = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{2u} \right) (2x) = \frac{x}{u} = \frac{x}{x^2+1}$ วิธีทำ ค. เราใช้กฎลูกโซ่ โดยที่ $y = \sin u$ และ $u = \ln x$ จะได้ว่า $y' = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} (\sin u) \frac{d}{dx} (\ln x) = (\cos u) \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$ วิธีทำ ง. เราใช้การหาอนุพันธ์โดยปริยาย จะได้ว่า $\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\ln x) + \frac{d}{dx} (\ln y) &= \frac{d}{dx} (2x) \\ \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{y} \right) y' &= 2 \\ \text{ดังนั้น } y' = y \left(2 - \frac{1}{x} \right) &= \frac{y(2x-1)}{x} \end{aligned}$
ตัวอย่าง 2.5	จงหาอนุพันธ์ของ $y = \cos[\ln(4x-3)]$, $x > \frac{3}{4}$
	วิธีทำ เราใช้กฎลูกโซ่โดยที่ $y = \cos u$, $u = \ln v$ และ $v = 4x-3$ จะได้ว่า $y' = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$ $\begin{aligned} &= \frac{d}{du} (\cos u) \cdot \frac{d}{dv} (\ln v) \cdot \frac{d}{dx} (4x-3) \\ &= (-\sin u) \left(\frac{1}{v} \right) (4) \quad \text{ประยุกต์สูตรอนุพันธ์} \\ &= -4 [\sin(\ln v)] \frac{1}{v} \quad \text{จัดรูปใหม่} \\ &= \frac{-4 \sin[\ln(4x-3)]}{4x-3} \quad \text{แทนค่าในเทอมของ } x \end{aligned}$

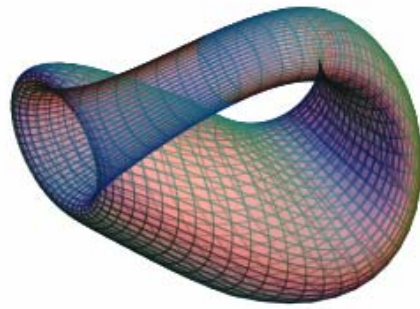
บทที่ 3 เทคนิคการอินทิเกรต (Techniques of Integration)



3.1 ตารางอินทิกรัล (Integral Tables)

$I_1. \int k dx = kx + C, k \text{ เป็นค่าคงที่}$	$I_2. \int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, r \neq -1$
$I_3. \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C, n \neq -1$	$I_4. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$I_5. \int \frac{du}{u} = \ln u + C$	$I_6. \int e^x dx = e^x + C$
$I_7. \int e^u du = e^u + C$	$I_8. \int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C, a > 0, a \neq 1$
$I_9. \int \sin x dx = -\cos x + C$	$I_{10}. \int \cos x dx = \sin x + C$
$I_{11}. \int \tan x dx = \ln \sec x + C$	$I_{12}. \int \cot x dx = \ln \sin x + C$
$I_{13}. \int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x + C$	$I_{14}. \int \csc x dx = \ln \csc x - \cot x + C$
$I_{15}. \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	$I_{16}. \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
$I_{17}. \int \sec^2 x dx = \tan x + C$	$I_{18}. \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$I_{19}. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$	$I_{20}. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$
$I_{21}. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C, u^2 > a^2$	$I_{22}. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u+a}{u-a} \right + C$
$I_{23}. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$	$I_{24}. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$
$I_{25}. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C, a^2 > u^2$	
$I_{26}. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$	
$I_{27}. \int \sinh u du = \cosh u + C$	$I_{28}. \int \cosh u du = \sinh u + C$

3.2 การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts ; IBP)



ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเทคนิคอินทิเกรตที่สำคัญที่เรียกว่า **การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts)** เทคนิคนี้ประยุกต์ใช้ได้กับการอินทิเกรตที่มีผลคูณของฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย ตัวอย่างเช่น การอินทิเกรตทีละส่วนใช้ได้ดีมากกับอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int x^2 e^x dx, \quad \int x \ln x dx \quad \text{และ} \quad \int e^x \sin x dx \quad \text{เป็นต้น}$$

การอินทิเกรตทีละส่วนได้มาจากสูตรอนุพันธ์ของผลคูณ

$$\frac{d}{dx}[uv] = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} = uv' + vu'$$

เมื่อ u และ v ต่างก็เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x ถ้า u' และ v' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว เราสามารถอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการข้างต้น เราจะได้

$$\begin{aligned} uv &= \int uv' dx + \int vu' dx \\ &= \int u dv + \int v du \end{aligned}$$

โดยการจัดรูปสมการใหม่ เราได้ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 3.2

การอินทิเกรต
ทีละส่วน (IBP)

ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันของ x และมีอนุพันธ์ต่อเนื่องแล้ว

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{.....(3.3)}$$

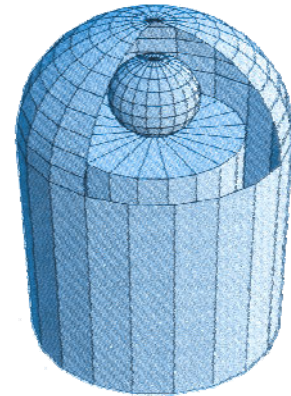
ข้อสังเกต

สูตรอินทิเกรตทีละส่วนเปลี่ยนจาก $\int u dv$ เป็นผลต่างของ uv กับ $\int v du$ โดยที่ อินทิกรัลใหม่จะหาได้ง่ายกว่าเดิม

ตัวอย่าง 3.41	จงหา $\int x^2 \ln x dx$
Integration by Parts	วิธีทำ ในกรณีนี้ x^2 อินทิเกรตง่ายกว่า $\ln x$ ยิ่งกว่านั้น อนุพันธ์ของ $\ln x$ ก็หาได้ไม่ยาก ดังนั้น เราจึงเลือก $dv = x^2 dx$ นั่นคือให้ $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$ และ $dv = x^2 dx \rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ โดยอินทิเกรตทีละส่วน ; $\int u dv = uv - \int v du$ เราจะได้ $\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \ln x \left(\frac{x^3}{3} \right) - \int \left(\frac{x^3}{3} \right) \left(\frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C\end{aligned}$ □
หมายเหตุ	ตรวจสอบคำตอบ โดยนำผลลัพธ์ไปหาอนุพันธ์ ดังนี้
	$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right] &= \frac{1}{3} \frac{d}{dx} (x^3 \ln x) - \frac{1}{9} \frac{d}{dx} (x^3) \\ &= \frac{1}{3} \left[x^3 \frac{1}{x} + \ln x (3x^2) \right] - \frac{1}{9} (3x^2) \\ &= \frac{1}{3} [x^2 + 3x^2 \ln x] - \frac{1}{3} x^2 \\ &= x^2 \ln x \quad \text{ซึ่งเป็นฟังก์ชันเริ่มต้น}\end{aligned}$
ตัวอย่าง 3.42	จงหา $\int \ln(x) dx$
Integration by Parts	วิธีทำ เราสามารถประยุกต์การอินทิเกรตทีละส่วนโดยกระทำเป็นขั้นตอน ดังนี้ ขั้น 1 เขียนอินทิกรัลที่กำหนดให้ในรูป $\int f(x)g(x)dx$ เมื่อเรากำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันเป็น $f(x)$ และ $g(x)$ ในกรณีที่มีฟังก์ชันเดียว เราสามารถกำหนดฟังก์ชันที่สองเป็นค่าคงที่ได้ นั่นคือ $g(x) = 1$ ในที่นี้ให้ $f(x) = \ln x$ ขั้น 2 แนะนำฟังก์ชันเชื่อมระหว่างกลาง $u(x)$ และ $v(x)$ ดังนี้ $\begin{cases} u &= f(x) &= \ln x \\ dv &= g(x) dx &= (1) dx &= dx \end{cases}$ แล้วเราต้องหาอนุพันธ์ของ $f(x)$ และหาปฏิยานุพันธ์ของ $g(x)$ จะได้

	$\begin{cases} du &= f'(x)dx &= \frac{1}{x}dx \\ v &= \int g(x)dx &= \int dx = x \end{cases}$ ขั้น 3 ใช้สูตรอินทิเกรตที่ละส่วน $\int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du$ จะได้ $\int \ln x dx = (\ln x)(x) - \int x \frac{1}{x} dx$ ขั้น 4 หาอินทิกรัลใหม่ $\int v(x)du$ ซึ่งใช้สูตรพื้นฐานได้หรืออินทิเกรตที่ง่ายลง เพราะว่า $\int x \frac{1}{x} dx = \int dx = x + C$ เราจะได้ $\int \ln x dx = x \ln(x) - x + C$ □
ตัวอย่าง 3.43	จงหา $\int e^x \cos 2x dx$
Integration by Parts	วิธีทำ ลึบบอกทางที่จะช่วยให้เราเลือก u และ dv ใช้ไม่ได้ ดังนั้นเราสามารถเลือก $dv = e^x dx$ และ $u = \cos 2x$ (เราอาจเลือก $dv = \cos 2x dx$ และ $u = e^x$ ก็ได้) $dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$ และ $u = \cos 2x \rightarrow du = -2 \sin 2x dx$ โดยการอินทิเกรตที่ละส่วน จะได้ $\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx \quad \dots\dots(1)$ จากการอินทิเกรตที่ละส่วนครั้งแรก เราพบว่าทางขวามืออินทิเกรตยังติดฟังก์ชัน $e^x \sin 2x$ โดยการแทน u และ dv สำหรับการประยุกต์อินทิเกรตที่ละส่วนครั้งที่สอง เช่นเดียวกับครั้งแรก $dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$ และ $u = \sin 2x \rightarrow du = 2 \cos 2x dx$ โดยการอินทิเกรตที่ละส่วนครั้งที่สอง จะได้ $\int e^x \sin 2x dx = e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x dx \quad \dots\dots(2)$ แทนค่า $\int e^x \sin 2x dx$ ลงในสมการ (1) เราจะได้ $\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2(e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x dx)$ หรือ $\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x dx \quad \dots\dots(3)$ เพราะว่าทางขวามือเป็นผลคูณของค่าคงที่กับอินทิกรัลเริ่มต้น เราสามารถบวก $4 \int e^x \cos 2x dx$ เข้าทั้งสองข้างของสมการ (3) จะได้ว่า
อินทิเกรตที่ละส่วน ครั้งแรก	
อินทิเกรตที่ละส่วน ครั้งที่สอง	

3.4 การอินทิเกรตโดยการแทนด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Substitution)



จากที่เราได้ศึกษาหัวข้อ 3.3 แล้วทำให้เราสามารถหาค่าอินทิกรัลที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลังได้ เราสามารถใช้เทคนิคการแทนด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันที่มีเทอม $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ และ $\sqrt{x^2 - a^2}$ รวมอยู่ด้วย

เราสามารถใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิตินี้ให้อยู่ในเทอมของฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง แล้วใช้เทคนิคการอินทิเกรตในหัวข้อ 3.3 ก็สามารถหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันดังกล่าวได้ วัตถุประสงค์เกี่ยวกับการแทนด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ การกำจัดเทอมที่มีรากที่สองในอินทิกรัลออกไป เราทำได้ด้วยเอกลักษณ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $a > 0$ ให้ $x = a \sin \theta$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ แล้ว

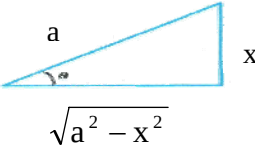
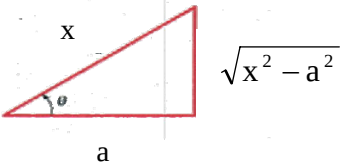
$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta \end{aligned}$$

หมายเหตุ $\cos \theta \geq 0$ เพราะว่า $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

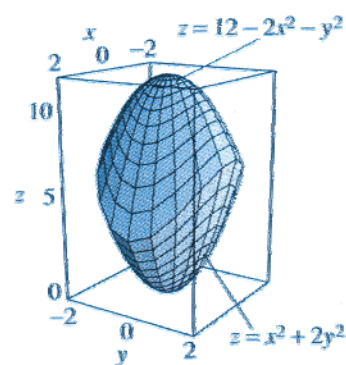
เราขอแบ่งรูปแบบของการอินทิเกรต ออกเป็น 3 แบบดังนี้

1. สำหรับ $\sqrt{a^2 - x^2}$ ให้ $a \sin \theta = x$
2. สำหรับ $\sqrt{a^2 + x^2}$ ให้ $a \tan \theta = x$
3. สำหรับ $\sqrt{x^2 - a^2}$ ให้ $a \sec \theta = x$

ในทุกๆ กรณี ให้ $a > 0$ สามเหลี่ยมมุมฉากเป็นอีกทางหนึ่งที่ย่อยต่อการหาฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สัมพันธ์กันในการแทนค่าของการเปลี่ยนตัวแปร

การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ ($a > 0$)			
	อินทิกรัลที่มีเทอม	ความสัมพันธ์ x กับ θ	เปลี่ยนตัวแปรเป็นฟังก์ชันตรีโกณ
รูปแบบ 1	$\sqrt{a^2 - x^2}$		$\sin \theta = x/a$ หรือ $x = a \sin \theta$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$
รูปแบบ 2			$\tan \theta = x/a$ หรือ $x = a \tan \theta$ $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$
รูปแบบ 3	$\sqrt{x^2 - a^2}$		$\sec \theta = x/a$ หรือ $x = a \sec \theta$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$
ตัวอย่าง 3.97	จงหา $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 - x^2}}$		
รูปแบบ 1 แทน $x = a \sin \theta$	วิธีทำ หมายถึงไม่มีสูตรการอินทิเกรตเบื้องต้นที่ประยุกต์ได้กับตัวอย่างในหัวข้อ 3.4 ต่อไปนี้ เราใช้การแทนด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ เราจะสังเกตเทอม $\sqrt{9 - x^2}$ เป็น $\sqrt{3^2 - x^2}$ ดังนั้น เราสามารถใช้การแทนค่าด้วยตัวแปรใหม่ให้ $x = a \sin \theta = 3 \sin \theta$ ใช้ดิฟเฟอเรนเชียล และสามเหลี่ยมมุมฉากความสัมพันธ์ของ x กับ θ ในรูป 3.4 จะได้ $dx = 3 \cos \theta d\theta$, $\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta$, และ $x^2 = 9 \sin^2 \theta$ ดังนั้น การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทำให้หาค่าอินทิกรัลได้ดังต่อไปนี้ $\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 - x^2}} &= \int \frac{3 \cos \theta d\theta}{(9 \sin^2 \theta)(3 \cos \theta)} && \text{แทนค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ} \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{9} \int \csc^2 \theta d\theta && \text{จัดรูปใหม่} \\ &= -\frac{1}{9} \cot \theta + C && \text{ประยุกต์สูตร 18} \\ &= -\frac{1}{9} \left(\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} \right) + C && \text{แทนค่า } \cot \theta \text{ จากสามเหลี่ยม} \\ &= -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{9x} + C && \text{ในเทอมของ } x \quad \square \end{aligned}$		

3.5 การอินทิเกรตโดยใช้เศษส่วนย่อย (Partial Fractions)



ในหัวข้อนี้ เราจะแสดงวิธีการอินทิเกรตสำหรับฟังก์ชันตรรกยะ โดยพยายามแยกตัวอินทิเกรตออกเป็นเศษส่วนย่อย แล้วนำเทคนิคการแทนค่า u ด้วยสูตรอินทิเกรตเบื้องต้นมาประยุกต์ใช้ ก่อนที่เราจะศึกษาถึงตัวอย่างของการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะ เราขอแนะนำฟังก์ชันตรรกยะก่อน

นิยาม 3.1

ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะเรียก $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ว่าเป็นฟังก์ชันตรรกยะ
(Rational Function)

ตัวอย่างเช่น $\frac{3}{x^2 + 4}$, $\frac{5x^2 + 3}{x(x-4)^2}$ และ $\frac{3x^4 + 21x^2 - 18}{x^3 + 6x^2 - 7x}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ
แต่ $\frac{4}{\sqrt{x}}$, $\frac{x^2 - 4}{\ln x}$, $\frac{|x+2|}{x^2 - 9}$ และ $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ไม่เป็นฟังก์ชันตรรกยะ

นิยาม 3.2

ให้ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

(Proper Rational Function) ถ้าดีกรีของ $P(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $Q(x)$

และเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ (Improper Rational Function)

ถ้าดีกรีของ $P(x)$ ไม่น้อยกว่าดีกรีของ $Q(x)$

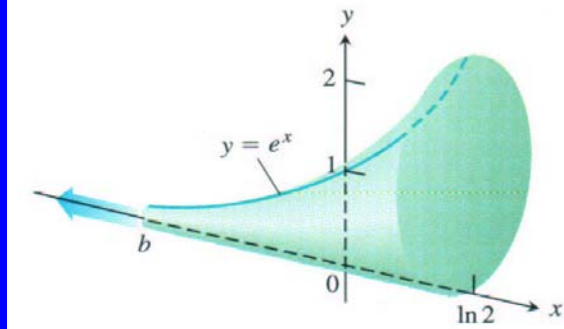
1. $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ เพราะว่า $P(x) = 3$ มีดีกรี 0 และ $Q(x) = x^2 + 4$ มีดีกรี 2

ตัวอย่าง 3.116	จงกระจาย $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$ ให้เป็นเศษส่วนย่อย
ตัวส่วนแยกเป็นตัวประกอบเชิงเส้นได้	วิธีทำ จากสูตร (1) เราจะได้ $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \quad \text{.....(1)}$ เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ จากสมการ (1) คูณด้วย $x^2 - 4$ จะได้ $1 = A(x+2) + B(x-2) \quad \text{.....(2)}$ วิธี 1 แทนค่า x ด้วยจำนวนที่เหมาะสมลงใน (2) แทน $x = 2$ จะได้ $1 = 4A$ หรือ $A = \frac{1}{4}$ แทน $x = -2$ จะได้ $1 = -4B$ หรือ $B = -\frac{1}{4}$ แทนค่า A และ B ลงใน (1) จะได้ $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$ วิธี 2 จากสมการ (2) จัดเทอมทางขวามือใหม่ จะได้ $1 = (A+B)x + 2A - 2B$ โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ของ x เราจะได้ระบบสมการต่อไปนี้ $A + B = 0 \quad \text{.....(3)}$ $2A - 2B = 1 \quad \text{.....(4)}$ เราสามารถหาค่า A และ B จากการแก้ระบบสมการ (3) และ (4) แล้วเราจะได้ $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4} \text{ เช่นกัน}$ นั่นคือ $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$ □
ข้อสังเกต	โดยทั่วไป ทุกๆ ตัวประกอบที่แตกต่างกัน $x - \alpha$ ในตัวส่วนให้เขียนเทอมของเศษส่วนย่อยในรูปแบบ $\frac{A}{x - \alpha}$
ตัวอย่าง 3.117	จงกระจาย $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$ ให้เป็นเศษส่วนย่อย
ตัวส่วนแยกเป็นตัวประกอบเชิงเส้นได้	วิธีทำ ก เพราะว่า $\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$ จะได้ $\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$

บทที่ 4

อินทิกรัลไม่ตรงแบบ

(Improper Integrals)



นิยามของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ กำหนดให้ศึกษาบนช่วง $[a, b]$ ซึ่งเป็นช่วงจำกัด ยิ่งไปกว่านั้นทฤษฎีเบื้องต้นของแคลคูลัสซึ่งทำให้เราหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตได้ กำหนดให้ f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ในที่นี้เราจะศึกษาลิมิตสำหรับค่าของอินทิกรัลซึ่งไม่ได้สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น นั่นคือเพราะว่าหนึ่งหรือทั้งคู่ของลิมิตของการอินทิเกรตเป็นค่าอนันต์ หรือ f มีจำนวนจำกัดของจุดไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ อินทิกรัลที่มีคุณสมบัติอย่างใดอย่างหนึ่ง เรียกอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integrals) ข้อสังเกต ฟังก์ชัน f จะกล่าวว่ามีจุดไม่ต่อเนื่องอนันต์ที่ c ถ้าค่าของ x เข้าใกล้ทางซ้ายหรือทางขวาของ c นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

ตัวอย่าง 4.1

ตัวอย่างของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ เช่น

ก. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx$, $\int_1^0 (1 - x)e^{-x} dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

เพราะว่า หนึ่งหรือทั้งคู่ของลิมิตของการอินทิเกรตเป็นค่าอนันต์

ข. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} dx$, $\int_{-2}^2 \frac{dx}{(x + 1)^2}$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

เพราะว่า อินทิเกรตมีจุดไม่ต่อเนื่องอนันต์บางจุดในช่วงของการอินทิเกรต

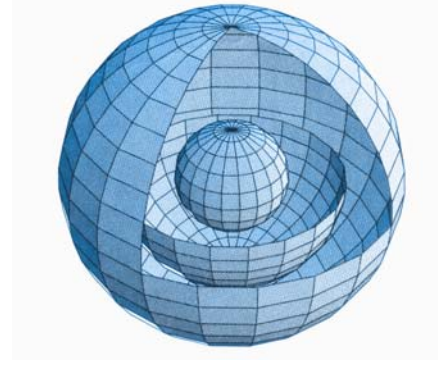
ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ มีจุดไม่ต่อเนื่องอนันต์ที่ $x = 0$ ซึ่งเป็นลิมิตล่างของการ

อินทิเกรต

หมายเหตุ	1. จากนิยาม 4.2 เราสามารถเลือกค่า C ได้ตามความสะดวก แต่เรามักนิยมเลือก $c = 0$ 2. การตรวจสอบการลู่เข้าของอินทิกรัลในรูปของ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ต้องแบ่งอินทิกรัลออกเป็นสองส่วนในรูปของ $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ กับ $\int_c^{\infty} f(x)dx$ ถ้ามีอินทิกรัลในอินทิกรัลหนึ่งไม่ลู่เข้า ก็จะไม่สามารถสรุปได้ว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ไม่ลู่เข้า
ตัวอย่าง 4.2	จงพิจารณาว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่ ก. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ ข. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ ค. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ วิธีทำ ก. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$ จากนิยาม 4.1 $= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b$ ประยุกต์สูตรลอการิทึม $= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - 0)$ ประยุกต์ทฤษฎีเบื้องต้นของแคลคูลัส $= \infty$ ค่าของลิมิต ดูรูป 4.5 เรากล่าวว่า $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ ไม่ลู่เข้า วิธีทำ ข. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$ จากนิยาม 4.1 $= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b$ ประยุกต์สูตรลอการิทึม $= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1)$ ประยุกต์ทฤษฎีเบื้องต้นของแคลคูลัส $= 1$ ค่าของลิมิต ดูรูป 4.6 เรากล่าวว่า $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ ลู่เข้าสู่ 1 วิธีทำ ค. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{x^2 + 1} dx$ จากนิยาม 4.1 $= \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan x]_0^b$ ประยุกต์สูตรฟังก์ชันผกผันของแทนเจนต์ $= \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan 0)$ ประยุกต์ทฤษฎีเบื้องต้นของแคลคูลัส $= \frac{\pi}{2}$ ค่าของลิมิต ดูรูป 4.7 เรากล่าวว่า $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ ลู่เข้าสู่ $\frac{\pi}{2}$ □

บทที่ 5

การประยุกต์ของอินทิกรัล (Applications of the Integral)



5.1 พื้นที่ (Area)

5.1.1 พื้นที่ของบริเวณระหว่างเส้นโค้งสองเส้น

(Area of a Region Between Two Curves)

โดยการแปลงเพียงเล็กน้อย เราสามารถขยายการประยุกต์ของอินทิกรัลจำกัดเขตจากพื้นที่ของบริเวณใต้เส้นโค้งไปยังพื้นที่ของบริเวณใต้เส้นโค้งในระนาบพิกัด โดยการอินทิเกรตฟังก์ชันที่นิยามบริเวณปิดสองฟังก์ชัน

สมมติเราต้องการหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้านบนด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ ปิดด้านล่างด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ และบนด้านซ้ายและด้านขวาปิดด้วยเส้นตรง อาจหาได้โดยทางเรขาคณิต แต่ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใดๆ เราใช้การหาพื้นที่ดังกล่าวด้วยการใช้อินทิเกรต

เราจะแสดงให้เห็นว่าอินทิกรัลหาค่านี้ได้อย่างไร เราเริ่มต้นโดยประมาณบริเวณด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า n ชั้นโดยฐานอยู่บนส่วนย่อย $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ของช่วง $[a, b]$ รูป 5.2 พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าชั้นที่ k รูป 5.3 คือ

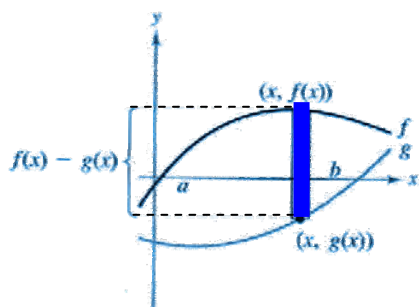
$$\Delta A_k = \text{สูง} \times \text{ฐาน} = [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k$$

แล้วเราประมาณพื้นที่ของบริเวณดังกล่าว โดยการรวมพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด n ชั้น

$$A \approx \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k \quad \text{ผลรวมรีมานท์}$$

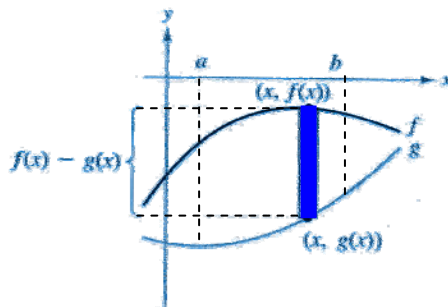
ขณะที่ $\|\Delta x_k\| \rightarrow 0$ ผลรวมบนทางขวามือเข้าใกล้ $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ เพราะว่า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เราให้พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวสู่ค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต

$$\text{ดังกล่าว นั่นคือ } A = \lim_{\|\Delta x_k\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

รูป 5.6



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

การประยุกต์สมการ 5.1 ให้การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งมีขั้นตอน ดังนี้

- ขั้นที่ 1** วาดกราฟของเส้นโค้งที่กำหนดให้ทั้งสอง และเขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เป็นตัวแทน ขนานกับแกน y โดยปิดด้านบนด้วยเส้นโค้ง f และปิดด้านล่างด้วยเส้นโค้ง g ซึ่งจะช่วยให้หาขีดจำกัดของอินทิเกรต ถ้าเรายังไม่ทราบขีดจำกัดของอินทิเกรต
- ขั้นที่ 2** หาขีดจำกัดของอินทิเกรต
- ขั้นที่ 3** เขียนสูตรสำหรับ $[f(x) - g(x)]$ แล้วจัดรูปให้ง่ายขึ้นถ้าทำได้
- ขั้นที่ 4** อินทิเกรต $[f(x) - g(x)]$ จาก a ถึง b แล้วจำนวนที่ได้จากการอินทิเกรต คือพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งที่ต้องการ

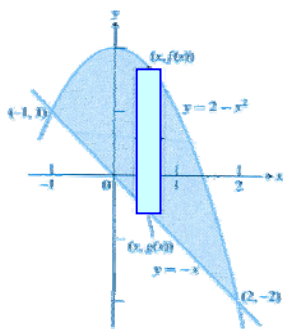
ตัวอย่าง 5.1

จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งพาราโบลา $y = 2 - x^2$ และ $y = -x$

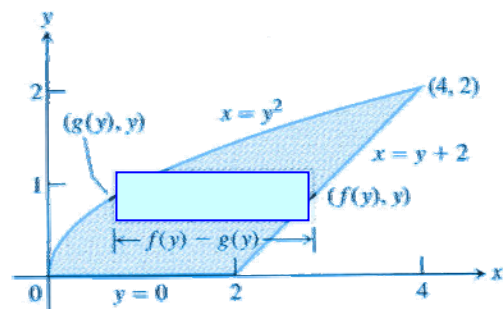
พื้นที่ระหว่าง
เส้นโค้งตัดกัน

- วิธีทำ ขั้น 1** วาดกราฟพาราโบลาและเส้นตรง แล้วเขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามแนวตั้ง ดูรูป 5.7 จากรูปต้องบ่งชี้กราฟบนและกราฟล่างได้ ในที่นี้เราให้ $f(x) = 2 - x^2$ และ $g(x) = -x$ โดยที่พิกัด x ของจุดตัดของกราฟทั้งสอง คือขีดจำกัดของอินทิเกรต
- ขั้น 2** หาขีดจำกัดของอินทิเกรต เราหาขีดจำกัดของอินทิเกรตโดยการแก้สมการ $y = 2 - x^2$ และ $y = -x$ เพื่อหาค่า x
- หาจุดตัด ให้ $2 - x^2 = -x^2$ สมการ $f(x)$ และ $g(x)$
- $$x^2 - x - 2 = 0$$
- จัดรูปใหม่
- $$(x+1)(x-2) = 0$$
- แยกวงเล็บ
- จะได้ $x = -1, 2$ แก้สมการหาค่า x
- บริเวณวิ่งจาก $x = -1$ ถึง $x = 2$ จะได้ขีดจำกัดของอินทิเกรตคือ $a = -1, b = 2$
- ขั้น 3** จัดรูปให้ง่ายขึ้นสำหรับสูตร $[f(x) - g(x)]$
- $$f(x) - g(x) = (2 - x^2) - (-x) = 2 - x^2 + x = 2 + x - x^2$$
- ขั้น 4** อินทิเกรต $[f(x) - g(x)]$ จาก a ถึง b

$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx \\
 &= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\
 &= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} \right) - \left(-2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
 &= 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = \frac{9}{2} \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$



รูป 5.7



รูป 5.8

ตัวอย่าง 5.2

จงหาพื้นที่ที่อยู่ในจุดภาค 1 ซึ่งถูกปิดล้อมด้านบนด้วยเส้นโค้ง $f(x) = \sqrt{x}$ และด้านล่างด้วยแกน x และเส้นตรง $y = x - 2$

วิธีทำ ขั้น 1 วาดกราฟดังรูป 5.8 แสดงบริเวณปิดล้อมด้านบนด้วยกราฟ $f(x) = \sqrt{x}$ และด้านล่างปิดล้อมเปลี่ยนจาก $g(x) = 0$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2$ ไปเป็น $g(x) = x - 2$ เมื่อ $2 \leq x \leq 4$ โดยมีจุดเชื่อมต่อที่ $x = 2$ เราต้องแบ่งบริเวณที่ $x = 2$ ออกเป็นบริเวณย่อย A และ B และวาดสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนวตั้งที่เป็นตัวแทนของทั้งสองบริเวณย่อย

ขั้น 2 ลิมิตของการอินทิเกรต สำหรับบริเวณ A คือ $a = 0$ ถึง $b = 2$ ลิมิตทางซ้ายมือสำหรับบริเวณ B คือ $a = 2$ หาลิมิตทางขวามือ โดยการแก้สมการ $y = \sqrt{x}$ และ $y = x - 2$ เพื่อหาค่า x

$$\text{หาจุดตัด ให้ } \sqrt{x} = x - 2$$

สมการ $f(x)$ และ $g(x)$

$$x = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

ยกกำลังสอง

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

จัดรูปใหม่

$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

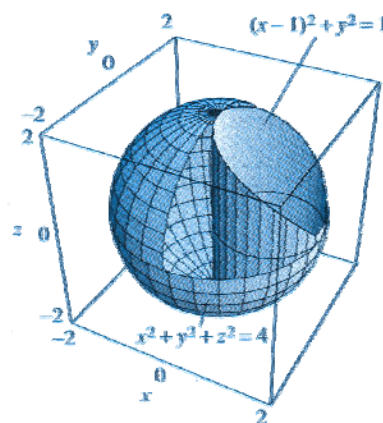
แยกวงเล็บ

$$\text{ดังนั้น } x = 1, 4$$

แก้สมการหา x

ค่าของ $x = 4$ เพียงค่าเดียวที่สอดคล้อง $\sqrt{x} = x - 2$ ดังนั้นลิมิตทางขวาคือ $b = 4$

5.2 ปริมาตรของรูปทรงตัน (Volume of Solids)

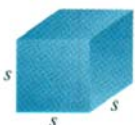


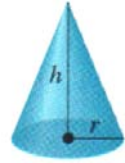
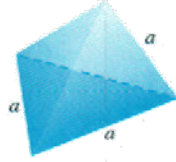
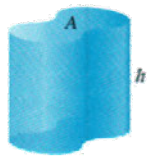
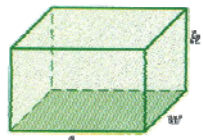
5.2.1 ปริมาตรโดยการเนียนชั้นบาง ๆ (Volume by Slicing)

เราได้เห็นแล้วว่า เราคำนวณพื้นที่โดยการอินทิเกรตได้อย่างไรในหัวข้อ 5.1 และในที่นี้เราจะขยายการประยุกต์ไปในสามมิติ เป็นการหาปริมาตรของรูปทรงตันโดยการอินทิเกรต สำหรับในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงปริมาตรโดยวิธีภาคตัดขวาง (Method of Cross Section) ปริมาตรของการหมุนโดยวิธีเนียนเป็นแผ่น (Disk Method) และปริมาตรของการหมุนโดยวิธีเปลือกทรงกระบอก (Shell Method)

วิธีของภาคตัดขวาง (Method of Cross Sections)

เราเริ่มต้นทบทวนสูตรการหาปริมาตรของรูปทรงตันบางรูปที่ทราบมาแล้วในแคลคูลัสเบื้องต้น ดังตาราง 5.1 ต่อไปนี้

ชื่อของรูปทรงตัน	ลักษณะเฉพาะ	สูตรปริมาตร	รูป
ลูกบาศก์ (Cube)	ขนาด s	$V = s^3$	
ทรงกลม (Sphere)	รัศมี r	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	

ชื่อของรูปทรงตัน	ลักษณะเฉพาะ	สูตรปริมาตร	รูป
กรวยกลม (Right Circular Cone)	สูง h รัศมีที่ฐาน r	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	
รูปทรงสี่ด้าน (Regular Tetrahedron)	ปริมาตรเกิดจาก 4 ด้าน โดยแต่ละด้านเป็น สามเหลี่ยมด้านเท่ายาว ด้านละ a	$V = \frac{1}{12}\sqrt{2} a^3$	
ทรงกระบอก (Cylinder)	สูง h พื้นที่ฐาน B	$V = Bh$	
ทรงกระบอกกลม (Circular Cylinder)	สูง h ฐานวงกลมที่มีรัศมี r	$V = \pi r^2 h$	
กล่องรูปทรงสี่เหลี่ยม มุมฉาก (Rectangular Box)	กว้าง l ยาว w , สูง h	$V = lwh$	
จากสูตรทรงกระบอกกลม สามารถมองเสมือนจำนวนของผลรวมของแผ่นกลมตามแนวตั้ง ดังรูป 5.34 และปริมาตรของทรงกระบอกกลมสามารถคำนวณโดยการคูณของพื้นที่หน้าตัดรวม B และส่วนสูง h ของกองเหรียญกลม ตัวอย่างเช่น ทรงกระบอกกลมที่มีส่วนสูง h และรัศมี r มีภาคตัดขวางเป็นวงกลมรัศมี r มีพื้นที่ $B = \pi r^2$ และปริมาตรของทรงกระบอกกลม $V = Bh = \pi r^2 h$			



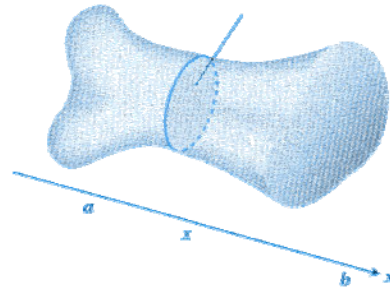
กองของเหรียญ
ทั้งหมดมีความสูง h



เหรียญที่อยู่
สูงสุดมีพื้นที่
ภาคตัดขวาง B
ปริมาตรของกอง
เหรียญคือ Bh

รูป 5.34

ภาคตัดขวาง $R(x)$ ที่มีพื้นที่ $A(x)$



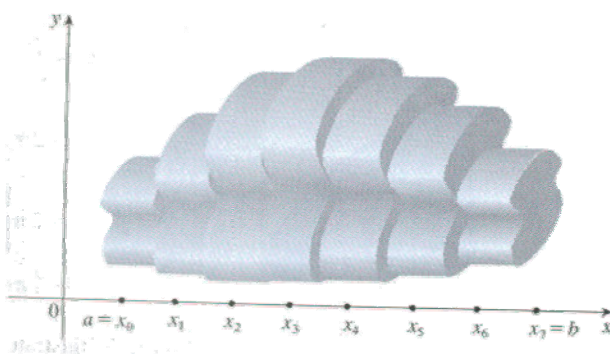
ถ้าพื้นที่ $A(x)$ ของภาคตัดขวาง $R(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ x
เราสามารถหาปริมาตรของรูปทรงตันโดยการอินทิเกรต $A(x)$
จาก a ถึง b ได้

รูป 5.35

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถใช้วิธีการข้างต้นหาปริมาตรของรูปทรงตันอื่นๆ ซึ่งเราทราบภาคตัดขวาง อย่างไรก็ตาม เมื่อพื้นที่ภาคตัดขวางมีค่าไม่คงที่ เราจำเป็นต้องใช้แคลคูลัสเข้ามาช่วย

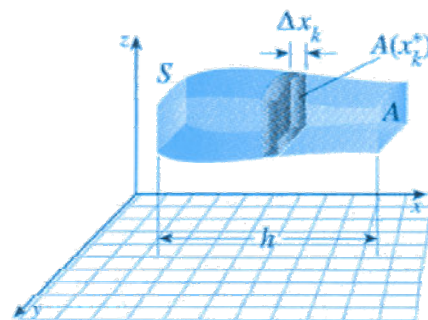
สมมติเราต้องการหาปริมาตรของรูปทรงตัน S ดังรูป 5.35 และภาคตัดขวางของรูปทรงตันทุกๆ จุด x ในช่วง $[a, b]$ เป็นอาณาบริเวณ $R(x)$ ของพื้นที่ $A(x)$ ถ้า A เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ x เราสามารถใช้มันนิยามและคำนวณหาปริมาตรรูปทรงตันเสมือนการอินทิเกรตในวิธีทางที่กล่าวต่อไปนี้

ให้ S เป็นรูปทรงตัน และสมมติให้สำหรับ $a \leq x \leq b$ ภาคตัดขวางของ S ที่ตั้งฉากกับแกน x ที่จุด x มีพื้นที่ $A(x)$ โดยเราคิดว่าตัดรูปทรงตันโดยมีดและกำลังเคลื่อนที่มีดเลื่อนไปบางๆ ซึ่งหน้าตัดมีพื้นที่ $A(x)$ และแต่ละชั้นมีความหนาเป็น Δx ดังแสดงในรูป 5.36



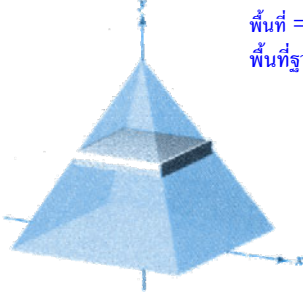
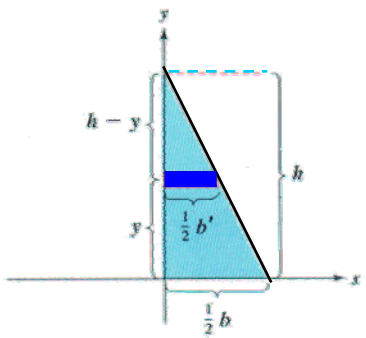
ก.

รูป 5.36



ภาคตัดขวางตามแนวตั้ง

ข.

ตัวอย่าง 5.24 แผ่นชิ้นบาง ๆ ทาง จากจุดกำหนดเป็น ระยะ y หน่วยแล้ว จึงอินทิเกรตตาม แกน y	จงพิสูจน์ว่า ปริมาตรของพีระมิดที่มีฐานเป็นรูปจัตุรัสคือ $V = \frac{1}{3}hB$ เมื่อ h เป็นความสูงของพีระมิด และ B เป็นพื้นที่ของฐานพีระมิด วิธีทำ พีระมิด ดังแสดงในรูป 5.39 ก. เราสามารถเฉือนชิ้นบาง ๆ ของพีระมิดโดย ขนานกับฐานที่ความสูง y แล้วได้รูปแบบของภาคตัดขวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้าน ยาวเท่ากับ b' โดยการใช้สามเหลี่ยมคล้ายในรูป 5.39 ข. เราจะได้ $\frac{b'}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \text{หรือ} \quad b' = \frac{b}{h}(h-y) \quad \text{โดยที่ } b \text{ เป็นความยาวของด้านของฐานพีระมิด}$ ดังนั้น $A(y) = (b')^2 = \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2$ อินทิเกรตระหว่าง $y = 0$ ถึง $y = h$ เราจะได้ $\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y) dy = \int_0^h \frac{b^2}{h^2} (h-y)^2 dy \\ &= \frac{b^2}{h^2} \int_0^h (h-y)^2 dy \\ &= -\left(\frac{b^2}{h^2}\right) \frac{(h-y)^3}{3} \Bigg _0^h \\ &= \frac{b^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}h b^2 \\ &= \frac{1}{3}hB \quad \text{เมื่อ } B = b^2 \end{aligned}$
ข้อสังเกต	จากตัวอย่าง 5.24 เราสามารถนำสูตร $V = \frac{1}{3}hB$ ไปประยุกต์ใช้ได้ ในที่นี้ $h = 3$, $b = 3$ ดังนั้น ปริมาตรของพีระมิดเท่ากับ $V = \frac{1}{3}hB = \frac{1}{3}hb^2 = \frac{1}{3}(3)(3)^2 = 9 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$
 พื้นที่ = $A(y)$ พื้นที่ฐาน = $B = b^2$ ก.  ข. รูป 5.39	



รูป 5.41

ก.ใช้จานกลม 5 แผ่น , $V = 4.2726$

ข.ใช้จานกลม 10 แผ่น , $V = 4.2097$

ค.ใช้จานกลม 20 แผ่น , $V = 4.1940$

ตัวอย่าง 5.26

ลิ้มไม้ชิ้นหนึ่งถูกตัดออกจากท่อนไม้ทรงกระบอกรัศมี 3 หน่วยโดยระนาบ 2 ระนาบ ระนาบแรกตั้งฉากกับแกนของทรงกระบอก และระนาบที่สองตัดขวางกับระนาบแรกทำมุม 45 องศา ที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก จงหาปริมาตรของลิ้มไม้

วิธีทำ ขั้น 1 วาดรูปคร่าวๆ เราวาดลิ้มและร่างภาคตัดขวางตามแบบอย่างตัดลิ้ม ตั้งฉากกับแกน x ดังรูป 5.42

ขั้น 2 สูตรสำหรับ $A(x)$ ภาคตัดขวางของลิ้มไม้ที่ x เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากของพื้นที่

$$A(x) = (\text{กว้าง}) (\text{สูง}) = (2\sqrt{9-x^2})(x) = 2x\sqrt{9-x^2}$$

ขั้น 3 ลิมิตของการอินทิเกรต สี่เหลี่ยมผืนผ้าวิ่งจาก $x = 0$ ถึง $x = 3$

ขั้น 4 อินทิเกรตเพื่อหาปริมาตร

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} dx$$

$$= -\int_0^3 (9-x^2)^{1/2} d(9-x^2) = \left[-\frac{2}{3} (9-x^2)^{3/2} \right]_0^3$$

$$= 0 + \frac{2}{3} (9)^{3/2} = 18 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

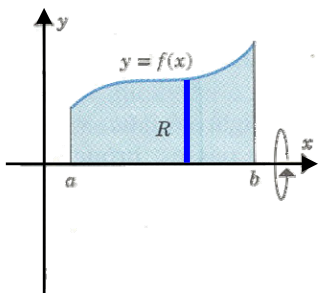
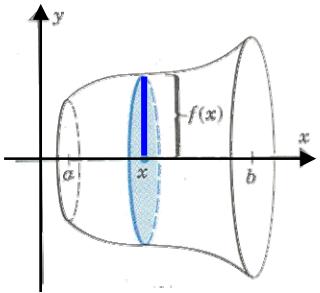
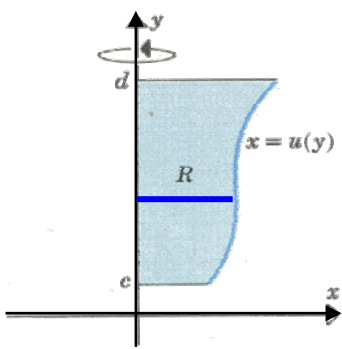
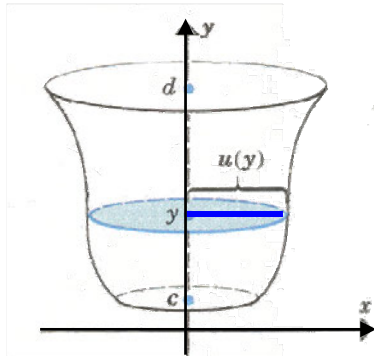
$$\begin{aligned} \text{ให้ } u &= 9-x^2 \\ du &= -2x dx \\ \int u^n du &= \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \end{aligned}$$

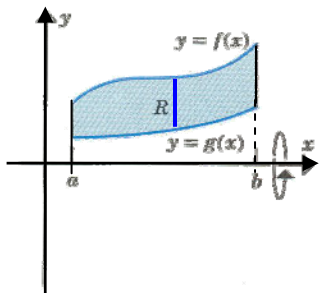
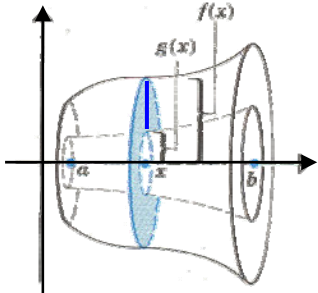
หมายเหตุ

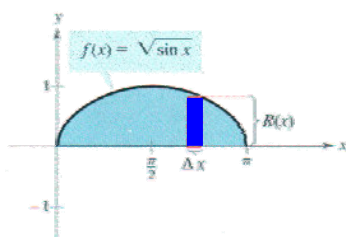
ในตัวอย่างนี้ ถ้าเราตัดลิ้มไม้ตามแนวแกน x ดังรูป 5.42 ค. และสร้างภาคตัดขวางเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ที่ x ใดๆ จะได้พื้นที่หน้าตัดเป็น

$$A(x) = \frac{1}{2} y \cdot h = \frac{1}{2} y(y \tan 45^\circ) = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{9-x^2})^2 = \frac{1}{2} (9-x^2)$$

$$\begin{aligned} \text{และปริมาตรคือ } V &= \int_a^b A(x) dx = \int_{-3}^3 \frac{1}{2} (9-x^2) dx = \frac{1}{2} \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3 \\ &= \frac{1}{2} (36) = 18 \text{ ลูกบาศก์หน่วย} \end{aligned}$$

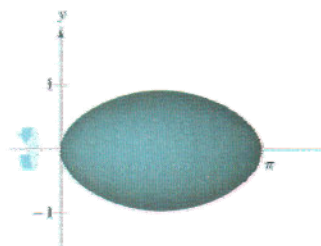
ข้อสังเกต	ขั้นตอนต่อไปนี้อาจช่วยให้เราจดจำแนวความคิดข้างต้นของระเบียบวิธีจานได้
	จากแคลคูลัสเบื้องต้น ใช้สูตรหา อินทิเกรตบนช่วง รู้สูตร → สมาชิกตัวแทนของปริมาตร → สูตรอินทิเกรต ปริมาตรของจาน $V = Bh = \pi r^2 h$ → $\Delta V = \pi y^2 \Delta x$ → $V = \pi \int_a^b y^2 dx$
	 ก.  ข. รูป 5.50
	ในทำนองเดียวกัน ถ้าแกนของการหมุนเป็นแกนแนวดิ่ง สูตรที่ได้รับเป็นดังนี้
ระเบียบวิธีจาน หมุนรอบแกน y The Disc Method	ปริมาตรของรูปทรงตัน V ที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน y ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = g(y)$, แกน y เมื่อ $c \leq y \leq d$ โดยที่ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[c, d]$ จะมีค่าเท่ากับ $V = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_c^d \pi (g(y))^2 dy$ (5.8) ดูรูป 5.51
	 ก.  ข. รูป 5.51

ระเบียบวิธี เครื่องล้างจาน หมุนรอบแกน x	สมมติ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่ $f(x) \geq g(x)$ บนช่วง $[a, b]$ และให้ R เป็นบริเวณปิดล้อมด้านบนด้วย $y = f(x)$ ด้านล่างด้วย $y = g(x)$ และด้านข้างด้วยเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ระเบียบวิธีเครื่องล้างจาน กล่าวว่า ปริมาตรที่ก่อกำเนิด โดย การหมุนบริเวณ R รอบแกน x คือ
The Washer Method $[f^2 - g^2] \neq (f - g)^2$	$V = \int_a^b \pi \left(\underbrace{[f(x)]^2}_{\text{รัศมีด้านนอก}} - \underbrace{[g(x)]^2}_{\text{รัศมีด้านใน}} \right) dx$ $= \pi \int_a^b \left(\underbrace{[R(x)]^2}_{\text{รัศมีด้านนอก}} - \underbrace{[r(x)]^2}_{\text{รัศมีด้านใน}} \right) dx$ $= \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [r(x)]^2 dx$ (5.9) รูป 5.52
 ก.  ข. รูป 5.52	
ระเบียบวิธี เครื่องล้างจาน หมุนรอบแกน y	สมมติ F และ G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่ $F(y) \geq G(y)$ บนช่วง $[c, d]$ และให้ R เป็นบริเวณปิดล้อมด้านขวาด้วย $x = F(y)$ ด้านซ้ายด้วย $x = G(y)$ และด้านล่างด้วยเส้นตรง $y = c$ และด้านบนด้วยเส้นตรง $y = d$ ระเบียบวิธีเครื่องล้างจาน กล่าวว่า ปริมาตรที่ก่อกำเนิด โดยการหมุนบริเวณ R รอบแกน y คือ
The Washer Method	$V = \int_c^d \pi \left(\underbrace{[F(y)]^2}_{\text{รัศมีด้านนอก}} - \underbrace{[G(y)]^2}_{\text{รัศมีด้านใน}} \right) dy$ $= \pi \int_c^d ([R(y)]^2 - [r(y)]^2) dy$ $= \pi \int_c^d [R(y)]^2 dy - \pi \int_c^d [r(y)]^2 dy$ (5.10) รูป 5.53



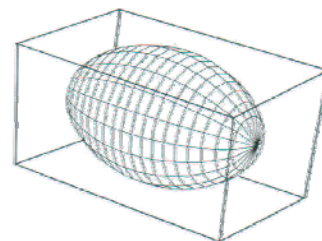
บริเวณ R บนระนาบ

ก.



รูปทรงตันของการหมุน

ข. รูป 5.56



รูปทรงตัน

ค.

ตัวอย่าง 5.34

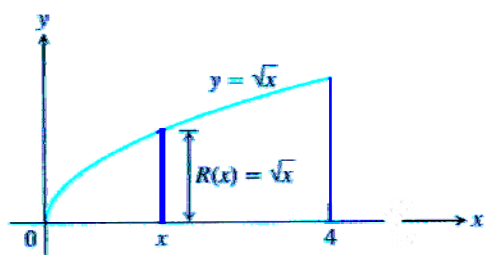
บริเวณปิดหมุน
รอบแกน x โดย
Disc Method

จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณระหว่างเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ และแกน x รอบแกน x

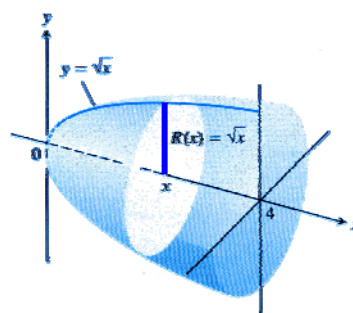
วิธีทำ บริเวณระหว่างเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ และแกน x ดังรูป 5.57 สร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าตัวแทนตั้งฉากกับแกน x บนบริเวณ R เราสามารถมองเห็นรัศมีของรูปทรงตันนี้เป็น $R(x) = y = \sqrt{x}$

โดยวิธีจานหมุนรอบแกน x จะได้ว่าปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนนี้คือ

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi [R(x)]^2 dx = \int_0^4 \pi [\sqrt{x}]^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \pi \frac{(4)^2}{2} = 8\pi \\ &= 25.1327 \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย} \end{aligned}$$



ก.บริเวณ R บนระนาบ



ข.รูปทางตันของการหมุน

รูป 5.57

ตัวอย่าง 5.41

บริเวณปิด
หมุนรอบแกน
หมุนที่ไม่ใช่ส่วน
หนึ่งของบริเวณ

จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ
เส้นตรง $y = 2x$ ในจัตุภาคที่ 1 หมุนรอบแกน y

วิธีทำ เริ่มต้นเราวาดบริเวณปิด R ล้อมรอบด้วยกราฟพาราโบลาหงาย $y = x^2$ และ
เส้นตรง $y = 2x$ ตัดกันที่จุด $(0, 0)$ และจุด $(2, 4)$ ดังรูป 5.64 สร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ตัวแทนตั้งฉากกับแกน y เราสามารถเห็นรัศมีการหมุนวงนอกและวงใน ดังนี้

$$R(y) = \sqrt{y} \quad \text{รัศมีวงนอกเป็นระยะจากแกน } y \text{ ถึงจุดบนกราฟพาราโบลา}$$

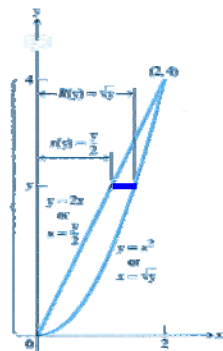
$$r(y) = \frac{y}{2} \quad \text{รัศมีวงในเป็นระยะจากแกน } y \text{ ถึงจุดบนกราฟเส้นตรง}$$

โดยวิธีเครื่องล้างจานหมุนรอบแกน y

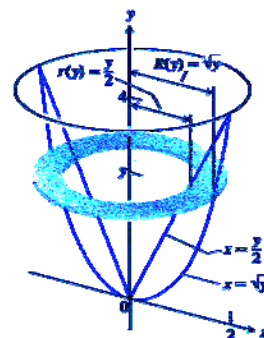
$$\begin{aligned} \text{จะได้ } dV &= \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2) dy \\ &= \pi\left((\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) dy = \pi\left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy \end{aligned}$$

อินทิเกรตระหว่าง 0 ถึง 4 เพื่อหาปริมาตร

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } V &= \pi \int_0^4 ([R(y)]^2 - [r(y)]^2) dy \\ &= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 \\ &= \frac{8\pi}{3} \\ &= 8.3776 \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย} \end{aligned}$$

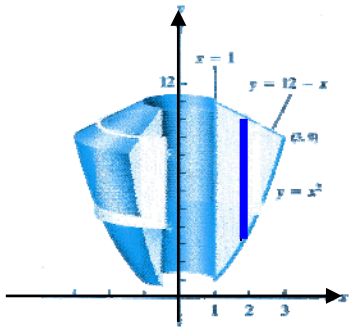
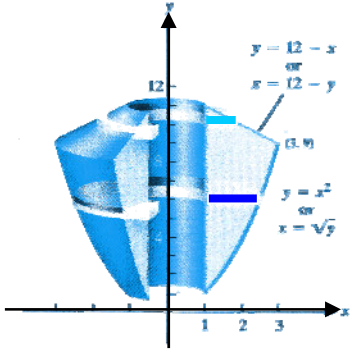


ก.บริเวณ R ในระนาบ



ข.รูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

รูป 5.64

(Shell Method) วิธีเปลือกทรงกระบอก  รูป 5.87	(Washer Method) วิธีเครื่องล้างจาน  รูป 5.88
ตัวอย่าง 5.60 Shell Method หมุนรอบแกน x	จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณในจุดภาคที่ 1 ปิดล้อมด้วยวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ รอบแกน x เมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$ วิธีทำ 1 โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก หมุนรอบแกน x เริ่มต้นวาดรูปวงรีในจุดภาคที่ 1 ดังรูป 5.89 สร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าตัวแทนตั้งฉากกับแกน y (ขนานกับแกนหมุน) โดยมีความสูงเป็น $h(y) = x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ และมีความหนา dy เรามองเห็นรัศมีการหมุนเป็น $p(y) = y$ จะได้ $V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)dy = 2\pi \int_0^b y \left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \right) dy$ ให้ $u^2 = b^2 - y^2$ ↑ $= \frac{2\pi a}{b} \int_b^0 u(-u du) = \frac{2\pi a}{b} \left(-\frac{u^3}{3} \right) \Big _b^0$ $= \frac{2\pi a}{b} \left(\frac{b^3}{3} \right) = \frac{2\pi ab^2}{3} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$ วิธีทำ 2 โดยวิธีจาน หมุนรอบแกน x จากรูป 5.90 สร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าตัวแทนตั้งฉากกับแกน x (ตั้งฉากกับแกนหมุน) โดยมีความสูงเป็น $h(x) = y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ และมีความหนา dx เรามองเห็นรัศมีการหมุนเป็น $R(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ อินทิเกรตเทียบกับ x จาก 0 ถึง a จะได้ปริมาตรของรูปทรงตันนี้เป็น $V = \int_0^a \pi [R(x)]^2 dx = \pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx$ $= \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big _0^a = \pi b^2 \left(a - \frac{a}{3} \right)$ $= \frac{2\pi ab^2}{3} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$ □

5.3 ความยาวส่วนโค้ง (Arc Length)

ในหัวข้อนี้ อินทิกรัลจำกัดเขตใช้หาความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งในระนาบ เราประมาณส่วนโค้งโดยส่วนของเส้นตรง ซึ่งความยาวกำหนดได้โดยสูตรระยะทาง

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

เส้นโค้งหาความยาวได้เป็นเส้นโค้ง ซึ่งมีความยาวส่วนโค้งจำกัด เราจะเห็นว่า เงื่อนไข เพียงพอสำหรับกราฟของเส้นโค้ง f เป็นเส้นโค้งหาความยาวได้ระหว่าง $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$ ก็คือ f' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ นั่นคือ ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และกราฟของเส้นโค้งบนช่วง $[a, b]$ เป็นเส้นโค้งเรียบ (Smooth Curve)

พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ เราสามารถประมาณกราฟของ f โดย n ส่วนของเส้นตรง ซึ่งจุดปลายกำหนดแน่นอนโดยส่วนแบ่ง

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

ดังแสดงในรูป 5.108 โดยกำหนดให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ และ $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ เราสามารถประมาณความยาวของกราฟโดย

$$L \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i)$$

ค่าประมาณนี้เข้าใกล้ค่าจริงดีขึ้นและดีขึ้น ขณะที่ $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

ดังนั้น เรานิยามความยาวของกราฟของเส้นโค้งนี้เป็น

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i)$$

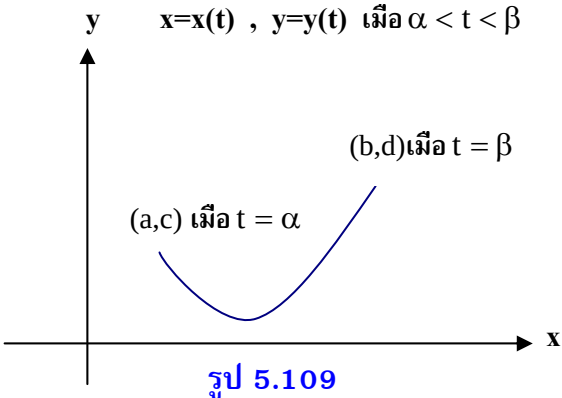
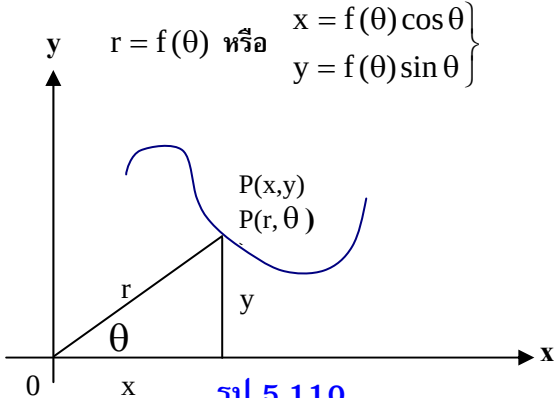
เพราะว่า $f'(x)$ หาค่าได้สำหรับทุก x ในช่วง (x_{i-1}, x_i) จากทฤษฎีค่าเฉลี่ย รับประกันว่ามีค่า c_i ในช่วง (x_{i-1}, x_i) โดยที่

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) \rightarrow \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$$

เพราะว่า f' ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่า $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ด้วย ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} (\Delta x_i) \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

เราเรียก L ว่า **ความยาวส่วนโค้ง (Arc Length)** ของ f ระหว่าง a และ b

 รูป 5.109	 รูป 5.110
ตัวอย่าง 5.73 สูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุด	จงหาความยาวเส้นตรงจาก (x_1, y_1) ไป (x_2, y_2) บนกราฟของ $f(x) = mx + b$ ดังรูป 5.111 วิธีทำ เพราะว่าความชัน $m = f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ และจากสูตรความยาวส่วนโค้ง สูตร 5.13 เราจะได้ $ \begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2} dx \\ &= \left[\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}} (x) \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}} (x_2 - x_1) \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ หน่วย} \end{aligned} $ □
ข้อสังเกต	จากตัวอย่าง 5.73 เราพบว่า $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ เป็นสูตรการหา
	ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระนาบนั้นเอง
ตัวอย่าง 5.74	จงหาความยาวส่วนโค้งของ $y = 4x + 5$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$ ดังรูป 5.112
	วิธีทำ ในที่นี้ ความชันของเส้นตรงเท่ากับ $f'(x) = 4$ และแทนในสูตรความยาวส่วนโค้ง สูตร 5.13 จะได้ $ \begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 16} dx = \sqrt{17} x \Big _0^1 \\ &= \sqrt{17} = 4.1231 \text{ หน่วย} \end{aligned} $ □

5.4 พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน (Area of a Surface of Revolution)

ในหัวข้อ 5.2 และ 5.3 อินทิกรัลจำกัดเขตใช้คำนวณหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนและความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งในระนาบ ในที่นี้เราต้องการมองหาวิธีดำเนินการสำหรับหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน

นิยาม 5.4

ถ้ากราฟของฟังก์ชันต่อเนื่องหมุนรอบเส้นตรง ผลลัพธ์ของพื้นที่ผิวที่เกิดขึ้นเรียกว่า **พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน (Surface of Revolution)**

พื้นที่ของพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน ได้รับจากสูตรสำหรับด้านข้างของพื้นที่ผิวของกรวยปลายตัด (Frustum) ของกรวยทรงกลม พิจารณาส่วนของเส้นตรงในรูป 5.137 เมื่อ L เป็นความยาวของส่วนของเส้นตรง r_1 เป็นรัศมีที่ปลายด้านซ้ายของส่วนของเส้นตรง และ r_2 เป็นรัศมีที่ปลายด้านขวาของส่วนของเส้นตรง เมื่อส่วนของเส้นตรงหมุนรอบแกนของการหมุนของมัน ทำให้ก่อกำเนิดกรวยปลายตัดของกรวยกลม โดยที่

$$S = 2\pi r L \quad \text{พื้นที่ผิวของกรวยปลายตัด}$$

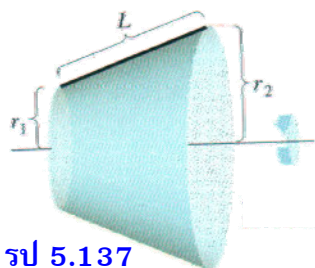
$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \quad \text{ค่าประมาณของรัศมีของกรวยปลายตัด}$$

สมมติกราฟของฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ หมุนรอบแกน x ทำให้เกิดพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน ดังแสดงในรูป 5.138 ให้ Δ เป็นส่วนแบ่งย่อยของช่วง $[a, b]$ โดยมีความกว้างของช่วงย่อย Δx_i แล้ว ความยาวของส่วนของเส้นตรงย่อย $\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ ก่อให้เกิดกรวยปลายตัดของกรวยกลม ให้ r_i เป็นค่าประมาณรัศมีของกรวยปลายตัดนี้ โดยทฤษฎี 1.10 (Intermediate Value Theorem)

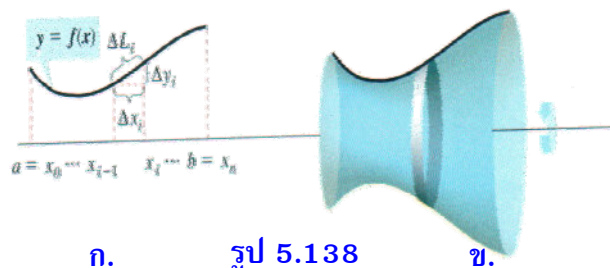
มีจุด d_i (ในช่วงย่อยที่ i) โดยที่ $r_i = f(d_i)$

พื้นที่ผิวด้านข้าง, ΔS_i , ของกรวยปลายตัด คือ

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= 2\pi r_i \Delta L_i = 2\pi f(d_i) \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ &= 2\pi f(d_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \end{aligned}$$



รูป 5.137



ก.

รูป 5.138

ข.

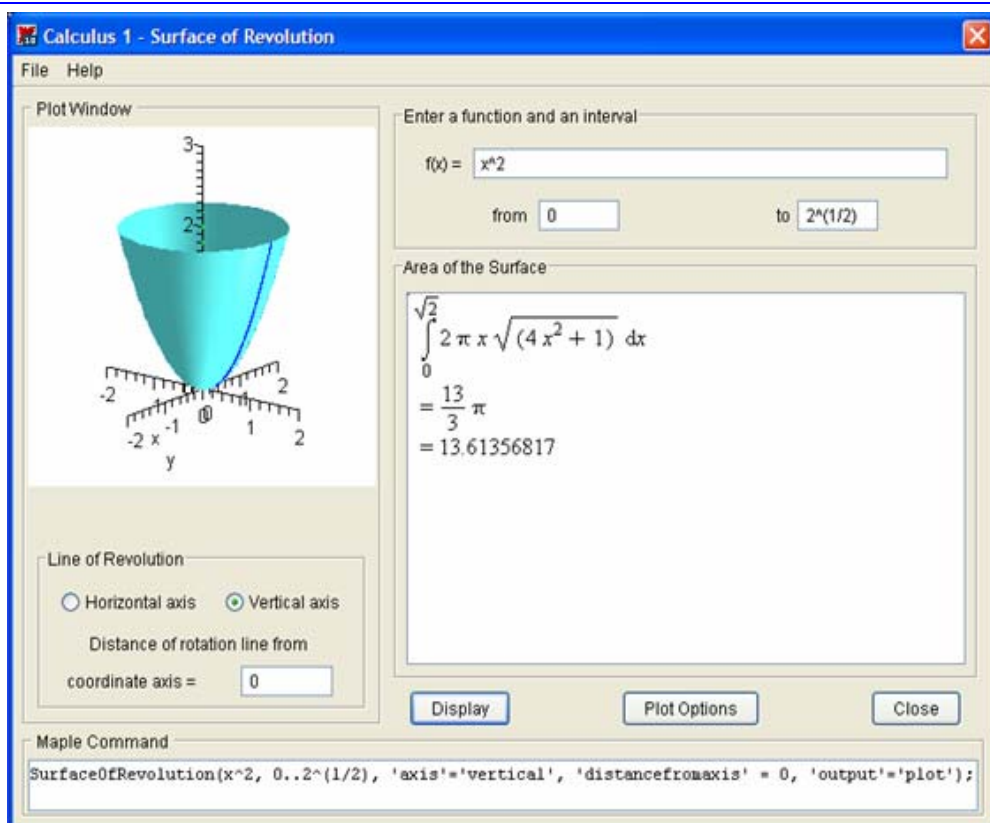
ตัวอย่าง 5.105

จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = x^2$ บนช่วง $[0, \sqrt{2}]$ รอบแกน y ดังแสดงในรูป 5.148

วิธีทำ ในที่นี้ระยะทางระหว่างแกน y (แกนหมุน) และกราฟของ f คือ $r(x) = x$ เพราะว่า $f'(x) = 2x$ จะได้ว่า

พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนกราฟของ $y = x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = \sqrt{2}$ รอบแกน y

$$\begin{aligned}
 \text{คือ } S &= 2\pi \int_a^b r(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1+(2x)^2} dx \\
 &= \frac{2\pi}{8} \int_0^{\sqrt{2}} (1+4x^2)^{1/2} (8x) dx = \frac{2\pi}{8} \left[\frac{(1+4x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\pi}{6} [(1+8)^{3/2} - (1)^{3/2}] \\
 &= \frac{13\pi}{3} \\
 &= 13.6235 \quad \text{ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$



รูป 5.148

5.5 โมเมนต์และจุดศูนย์กลางมวล (Moments and Centers of Mass)

นิยาม 5.1

มวล และน้ำหนัก
(Mass , Weight)

(Newton's
Second Law)
กฎของนิวตัน
ข้อ 2 (Masses
Along a line)
มวลของเส้น

(Moment about
Origin) โมเมนต์
รอบจุดกำเนิด

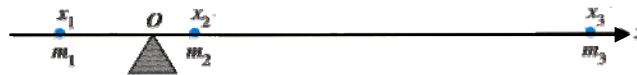
(Balance Point)
จุดสมดุล

(Thin Rod With
Density
Function)
(ความหนาแน่นไม่
คงที่)

น้ำหนักเป็นแรงที่เป็นผลมาจากแรงดึงดูดกระทำกับมวล ถ้าวัตถุมวล m วาง ณ ตำแหน่งที่มีความเร่งของแรงโน้มถ่วง g แล้ว น้ำหนักของวัตถุ คือ

$$F = mg \quad \text{.....(5.25)}$$

มวล m_1, m_2 และ m_3 บนแกน x และจุดหมุน ณ จุด O มีตำแหน่งต่าง ๆ ดังรูป 5.161



รูป 5.161

ระบบของโมเมนต์รอบจุดกำเนิด (Moment of the System about the Origin) คือ

$$M_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$$

หรือ

$$M_0 = \sum m_k x_k \quad \text{.....(5.26)}$$

ถ้าให้ $\bar{x}$ เป็นตำแหน่งที่ทำให้คานอยู่ในลักษณะสมดุล ดังรูป 5.162



ตำแหน่งสมดุล

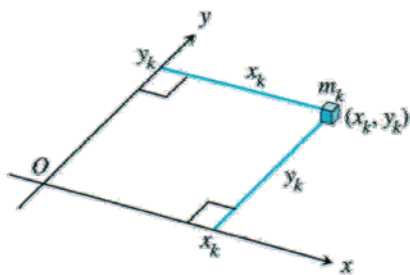
รูป 5.162

จะได้

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum M_k x_k}{\sum M_k} \\ &= \frac{\text{ระบบของโมเมนต์รอบจุดกำเนิด}}{\text{ระบบของมวล}} \end{aligned} \quad \text{.....(5.27)}$$

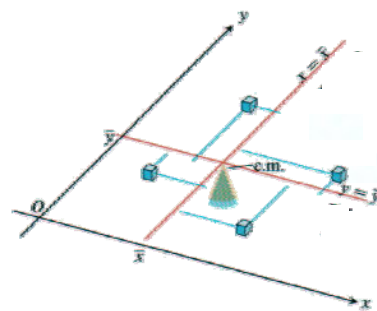
Moment , Mass and Center of Mass ของคานหรือแท่งตามแนวทางแกน x ความหนาแน่น $\delta(x)$ ณ ตำแหน่ง x ใด ๆ มีสูตรการคำนวณ ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์รอบจุดกำเนิด (Moment about Origin)} \quad M_0 &= \int_a^b x \delta(x) dx \\ \text{มวล (Mass)} \quad M &= \int_a^b \delta(x) dx \quad \text{.....(5.28)} \\ \text{จุดศูนย์กลางของมวล (Center of Mass)} \quad \bar{x} &= \frac{M_0}{M} \end{aligned}$$



ก.

รูป 5.163



ข.

มวลของอาณาบริเวณ (Masses Distributed over a Plane)

$$\text{ระบบของมวล} = M = \sum m_k \quad \text{.....(5.29)}$$

(System of Mass)

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์รอบแกน } x \quad M_x &= \sum m_k y_k \\ \text{(Moment about x-Axis)} \\ \text{โมเมนต์รอบแกน } y \quad M_y &= \sum m_k x_k \\ \text{(Moment about y-Axis)} \end{aligned} \quad \text{.....(5.30)}$$

มวลของแผ่นบาง ๆ (Mass of a Thin Plate)

โมเมนต์ (ที่หนึ่ง) มวล และจุดศูนย์กลางของมวลของมวลของแผ่นบาง ๆ บนระนาบ xy

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์รอบแกน } x \quad M_x &= \int y dm \\ \text{(Moment about x - axis)} \\ \text{โมเมนต์รอบแกน } y \quad M_y &= \int x dm \\ \text{(Moment about y - axis)} \\ \text{มวล (Mass)} \quad M &= \int dm \\ \text{จุดศูนย์กลางของมวล} \quad \bar{x} &= \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} \\ \text{(Center of Mass)} \end{aligned} \quad \text{.....(5.30)}$$

โดยที่ $dm = \delta dA$

δ คือ ความหนาแน่นของมวลที่จุด (x, y)

dA คือ พื้นที่ของแถบบาง ๆ (Strip)

dm คือ มวลของพื้นที่ dA

มวลของพื้นที่ = ความหนาแน่น $\times$ พื้นที่ของมวลนั้น ดังแสดงในรูป 5.164

บรรณานุกรม

1. Adam, Robert A. **Calculus 4th Edition**. Addison Wesley, U.S.A, 1991.
2. Anton, Bivens and Davis. **Calculus 7th Edition**. John Wiley & Sons, U.S.A, 2002.
3. Bahder, Thomas B. **Mathematica For Scientists and Engineers**. Addison Wesley, U.S.A, 1995.
4. Baipai, Mustoe Walker. **Engineering Mathematics 2nd Edition**. John Wiley, U.S.A, 1990.
5. Bradley and Smith. **Calculus** Prentice Hall, Inc. U.S.A, 1995.
6. Burgmeier, James. W. **Calculus With Applications**. McGraw-Hill, U.S.A, 1990.
7. Cramdall, Richard. **Mathematica for the Sciences**. Addison Wesley, U.S.A, 1990.
8. Donnelly, Dinnis. **Mathcad for Introductory Physics**. Addison Wesley, U.S.A, 1992.
9. Edwards C. Henry and Penny David E. **Calculus With Analytic Geometry. 5th Edition**. Prentice-Hall Inc. U.S.A, 1998.
10. Finney, Weir and Giordano. **Calculus 10th Edition**. Addison-Wesley. U.S.A, 2001.
11. Holder, Defranza and Pasachoff. **Calculus 3rd Edition**. U.S.A, 1995.
12. Jeffrey, Alan. **Essentials of Engineering Mathematics**. Chapman & Hall, 1995.
13. James, Glyn. **Engineering Mathematics 2nd Edition**. Addison Wesley, U.S.A, 1996.
14. Kaufmann, Jerome E. **Precalculus 3rd Edition**. PWS Publishing Company, 1995.
15. Komaromi. **Sketching Curves**. Australia, 1990.
16. Larson, Hostetler and Edwards. **Calculus 5th Edition**. D.C.Heath and Company. U.S.A, 1994.
17. Mizrahi and Sullivan. **Calculus & Analytic Geometry 3rd Edition**. Wadsworth Publishing Company. U.S.A, 1990.
18. Ostebee, Arnold. And Zorn, Porn. **Calculus**. Saunders College Publishing, New York, 1997.
19. Repka, Joe. **Calculus & Analytic Geometry**. Wm.C.Brown Publishers, U.S.A, 1994.
20. Salas, Hille and Etgen. **Calculus : One Variable 8th Edition**. John Wiley & Sons, U.S.A, 1999.
21. Smith, Cameron. **The Mathematica Graphics Guidebook**. Addison-Wesley. U.S.A, 1995.
22. Steward, James. **Calculus 5th Edition**. Thomson-Brooks/cole. Singapore, 2003.
23. Taylor, Gilligan. **Applied Calculus 3rd Edition**. Brooks/cole, 1993.
24. Varberg and Purcell. **Calculus 7th Edition**. Prentice Hall International, Inc. U.S.A, 1997.