

บ้านครูมด
BAANKRUMOD

≡ สรุปเนื้อหา ≡

ม. 3 เข้า ม. 4

(5 วิชา)



คณิตศาสตร์



วิทยาศาสตร์



ภาษาต่างประเทศ



ภาษาไทย



สังคมศึกษา ศาสนา
และวัฒนธรรม



ฟิสิกส์



เคมี



ชีววิทยา



วิทยาศาสตร์
กายภาพ

คำนำ ● ● ● ●

หนังสือเล่มนี้ กลั่นกรองมาจากประสบการณ์ทางวิชาการที่สถาบัน
บ้านครูมดสั่งสมมาเป็นเวลา 15 ปี โดยเนื้อหาแยกเป็น 2 ส่วนด้วยกัน เล่มนี้
คือสรุปเนื้อหา ม.3 เข้า ม.4 เพื่อให้สอดคล้องกับการใช้ในการทบทวนเนื้อหา
และนำไปต่อยอดสู่การสอบเข้าในระดับที่สูงขึ้น ซึ่งใครไม่มีถือว่าพลาด
เพราะเป็นการจัดทำเนื้อหาโดยอ้างอิงสถิติการออกข้อสอบเก่า ระดับ
ความยาก และแนวข้อสอบจริง

ในตลอดระยะเวลา 15 ปีที่ผ่านมาเราขึ้นเป็นอันดับ 1 ทางด้าน
การสอบเข้าและเพิ่มเกรดได้ ไม่เพียงแต่แนวทางการสอนที่เป็นเอกลักษณ์
มีการปรับพฤติกรรมน้อง ๆ ความสำเร็จเพียงเท่านั้น แต่ในแง่หลักสูตร
เราได้มีการปรับปรุงอย่างหนัก เน้น และให้เป็นมาตรฐานทางด้านการเรียน
การสอน ซึ่งหนังสือชุดนี้ตอบโจทย์ดังกล่าวของสถาบันได้เป็นอย่างดี

ใครที่อยากสอบเข้าในโรงเรียนในเครือรัฐบาล เตรียมอุดมศึกษา
มหิดล จุฬารักษ์ หรือกำเนิดวิทย์ หนังสือชุดนี้คือพื้นฐานที่จำเป็นต้องรู้
ในการต่อยอดที่ต้องฝึกฝนและทำให้ได้ 100% ถ้าทำไม่ได้ถือว่าพลาด

ส่วนใครที่อยากเพิ่มเกรด หนังสือชุดนี้
เป็นแนวทางในการเพิ่มเกรดแบบก้าวกระโดดได้เป็น
อย่างดี ทั้งนี้ทั้งนั้น ต่อให้หนังสือดีแค่ไหนหาก
เราไม่ได้ตั้งใจก็ไม่มีผลหมาย ขอให้ทุกคนมีพลัง
มีปัญญา และประสบความสำเร็จทุกคนครับ

ดร. ภัฏฐวร พันธวงษ์
ผู้อำนวยการสถาบันบ้านครูมด



สารบัญ ● ● ● ●

คณิตศาสตร์

6

พื้นที่ผิวและปริมาตร กราฟ ระบบสมการเชิงเส้น	7
ความคล้าย	22
กรณีที่สองและที่สาม	27
การแยกตัวประกอบของพหุนาม	33
สมการกำลังสอง	39
พาราโบลา	44
อสมการ	57
ระบบสมการ	64
วงกลม	70
เศษส่วนของพหุนาม	78
ความน่าจะเป็น	87
สถิติ	91
การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม	96

วิทยาศาสตร์

101

ฟิสิกส์	102
เคมี	119
ชีววิทยา	136
วิทยาศาสตร์กายภาพ	155

ภาษาต่างประเทศ

172

Vocabulary	173
Reading Comprehension	190
Conversation	208
Grammar	218

ภาษาไทย

236

หลักภาษาไทย	237
-------------	-----

สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม

289

ภูมิศาสตร์	290
ประวัติศาสตร์	309
เศรษฐศาสตร์	318
หน้าที่พลเมือง วัฒนธรรม และการดำเนินชีวิตในสังคม	333
ศาสนา ศิลปกรรม จริยธรรม	344

คณิตศาสตร์

- พื้นที่ผิวและปริมาตร กราฟ ระบบสมการเชิงเส้น
- ความคล้าย
- กรณีสองและที่สาม
- การแยกตัวประกอบของพหุนาม
- สมการกำลังสอง
- พาราโบลา
- อสมการ
- ระบบอสมการ
- วงกลม
- เศษส่วนของพหุนาม
- ความน่าจะเป็น
- สถิติ
- การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

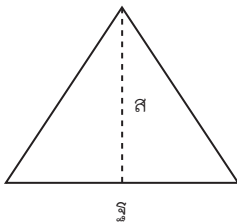
พื้นที่ผิวและปริมาตร กราฟ ระบบสมการเชิงเส้น

สรุปสูตรพื้นที่



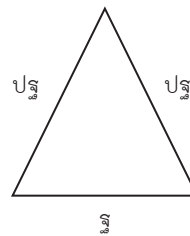
พื้นที่รูปสามเหลี่ยม

สามเหลี่ยมทั่วไป



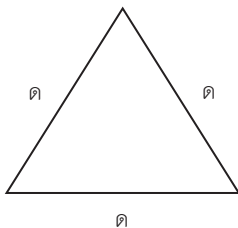
$$\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

สามเหลี่ยมหน้าจั่ว



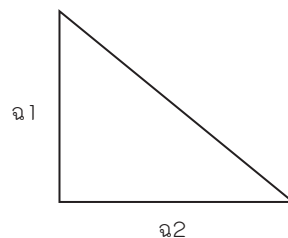
$$\frac{\text{ฐาน}}{4} \times \sqrt{4 \text{ ด้านประกอบฐาน}^2 - \text{ฐาน}^2}$$

สามเหลี่ยมด้านเท่า



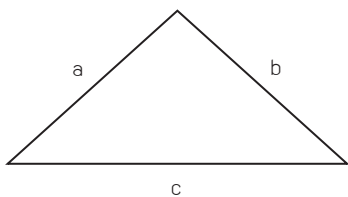
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ด้าน})^2$$

สามเหลี่ยมมุมฉาก



$$\frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของด้านประกอบมุมฉาก}$$

กรณีทราบความยาวทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม สามารถหาพื้นที่โดยใช้สูตรต่อไปนี้



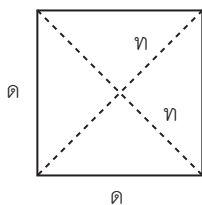
กำหนดให้ $s = \frac{a + b + c}{2}$

$$\text{พื้นที่} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$



พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม

สี่เหลี่ยมจัตุรัส



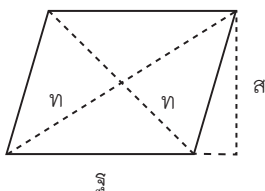
ด้าน × ด้าน หรือ $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม

สี่เหลี่ยมผืนผ้า



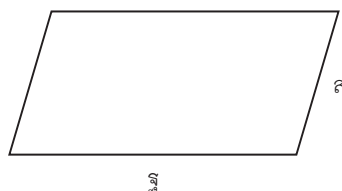
กว้าง × ยาว

สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

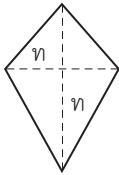
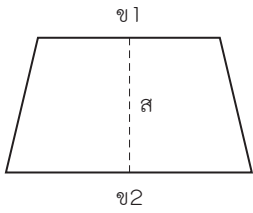
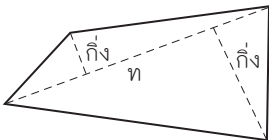


ฐาน × สูง หรือ $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม

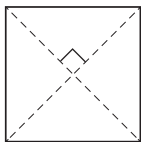
สี่เหลี่ยมด้านขนาน



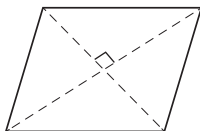
ฐาน × สูง

สี่เหลี่ยมรูปว่าว  $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม	สี่เหลี่ยมคางหมู  $\frac{1}{2} \times$ ผลบวกของด้านคู่ขนาน $\times$ สูง
สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า  $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม $\times$ ผลบวกของเส้นกึ่ง	กำหนดให้ ฐ = ฐาน กึ่ง = เส้นกึ่ง ส = สูง ก = กว้าง ด = ด้าน ย = ยาว ท = เส้นทแยงมุม ฉ = ด้านประกอบมุมฉาก ข = ด้านขนาน ปลู = ด้านประกอบฐาน

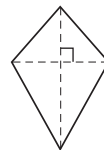
สี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก ได้แก่



สี่เหลี่ยมจัตุรัส



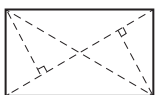
สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน



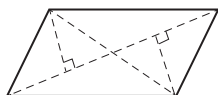
สี่เหลี่ยมรูปว่าว

สามารถใช้สูตรพื้นที่ $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม ได้เลย

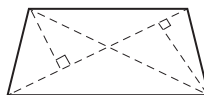
สี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมไม่เป็นมุมฉาก ได้แก่



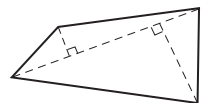
สี่เหลี่ยมผืนผ้า



สี่เหลี่ยมด้านขนาน



สี่เหลี่ยมคางหมู

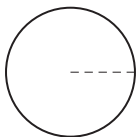


สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

สามารถใช้สูตรพื้นที่ $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม $\times$ ผลบวกของเส้นกึ่ง ได้เลย



พื้นที่วงกลม



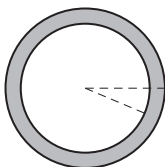
$$\pi r^2$$

π คือ ค่าคงตัว มีค่าเท่ากับ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14

r คือ รัศมี (เป็นครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลาง)



พื้นที่วงแหวน



$$\pi(R^2 - r^2)$$

หรือ $\pi(R - r)(R + r)$

π คือ ค่าคงตัว มีค่าเท่ากับ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14

R คือ รัศมีวงใหญ่ และ r คือ รัศมีวงเล็ก



พื้นที่หลายเหลี่ยมด้านเท่า (n เหลี่ยม)

$$= \frac{1}{4} \times n \times \text{ด้าน}^2 \times \cot \frac{180}{n}$$

เช่น พื้นที่รูปหกเหลี่ยม

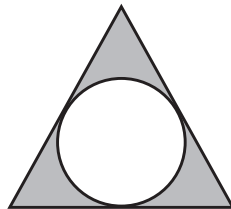
$$= \frac{1}{4} \times 6 \times \text{ด้าน}^2 \times \cot \frac{180}{6}$$

$$= \frac{1}{4} \times 6 \times \text{ด้าน}^2 \times \cot 30$$

$$= \frac{1}{4} \times 6 \times \text{ด้าน}^2 \times \sqrt{3}$$



พื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่ไม่เอาพื้นที่วงกลมแนบ



$$\text{พื้นที่แรเงา} = rs$$

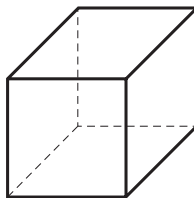
r คือ รัศมีของวงกลม

s คือ ผลรวมของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม $\div 2$



พื้นที่ผิวและปริมาตร

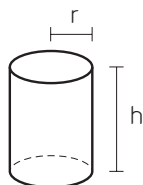
ปริซึม



$$\text{ปริมาตร} = \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

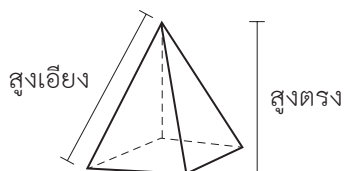
$$\text{พื้นที่ผิว} = \text{พื้นที่ฐานสองด้าน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง}$$

ทรงกระบอก



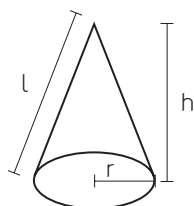
$$\begin{aligned}\text{ปริมาตร} &= \text{พื้นที่หน้าตัด} \times \text{ความสูง} = \pi r^2 h \\ \text{พื้นที่ผิว} &= \text{พื้นที่หน้าตัดสองด้าน} + \text{พื้นที่ผิวโค้ง} \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r h\end{aligned}$$

พีระมิด



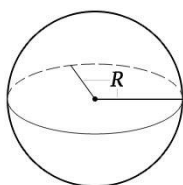
$$\begin{aligned}\text{ปริมาตร} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูงตรง} \\ \text{พื้นที่ผิว} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด} \\ &= \text{พื้นที่ฐาน} + \left(\frac{1}{2} \times \text{ความยาวรอบฐาน} \times \text{สูงเอียง} \right)\end{aligned}$$

กรวย



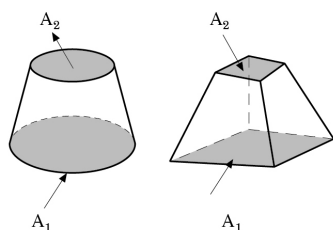
$$\begin{aligned}\text{ปริมาตร} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูงตรง} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ \text{พื้นที่ผิว} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวโค้งกรวย} \\ &= \pi r^2 + \pi r l \quad ; (l \text{ คือ สูงเอียง})\end{aligned}$$

ทรงกลม



$$\begin{aligned}\text{ปริมาตร} &= \frac{4}{3} \pi R^3 \\ \text{พื้นที่ผิว} &= 4\pi R^2\end{aligned}$$

ทรงกรวยหรือพีระมิดที่ถูกตัดยอด



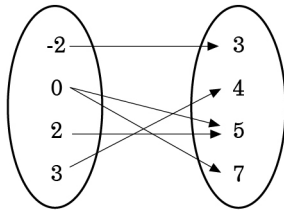
$$\begin{aligned}\text{ปริมาตร} &= \frac{h}{3} (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2}) \\ A_1 &= \text{พื้นที่สี่เหลี่ยมใหญ่ด้านล่าง} \\ A_2 &= \text{พื้นที่สี่เหลี่ยมเล็กด้านบน}\end{aligned}$$



คู่อันดับ

คู่อันดับเป็นการจับคู่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของกลุ่มสองกลุ่ม โดยการเขียนคู่อันดับจะใช้ “()” และเครื่องหมาย “ , ” เช่น (A, B) โดยเราจะอ่านว่า คู่อันดับ เอ บี เป็นต้น

การเขียนแผนภาพจากคู่อันดับ เราจะให้ต้นลูกศรเป็นสมาชิกตัวที่หนึ่ง คู่กับหัวลูกศรที่ต้นลูกศรนั้นชี้หา เช่น



จากแผนภาพ จะเขียนคู่อันดับได้ดังนี้

$(-2, 3), (0, 5), (0, 7), (2, 5), (3, 4)$

การเท่ากันของคู่อันดับ $(A, B) = (C, D)$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ และ $C = D$ เช่น

ถ้า $(a + 3, 5) = (4, y - 2)$ จะได้ $a + 3 = 4$ และ $5 = y - 2$
 ดังนั้น $a = 4 - 3$ และ $5 + 2 = y$
 $a = 1$ และ $y = 7$



กราฟ

กราฟ คือ การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของกลุ่มสองกลุ่มในระบบพิกัดฉาก โดยจะมีเส้นจำนวนในแนวนอน (แกน X) และแนวตั้ง (แกน Y) ตัดกันเป็นมุมฉาก ดังรูป

จะเห็นว่าแกน X และแกน Y ตัดกันเป็นมุมฉากที่จุดศูนย์ เราจะเรียกจุดนั้นว่า จุดกำเนิด (0, 0)

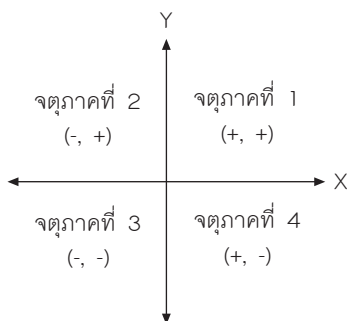
เมื่อแกน X และแกน Y ตัดกัน จะแบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า จตุภาค (Quadrant)

จตุภาคที่ 1 : ค่า X เป็นบวก และค่า Y มีค่าเป็นบวก

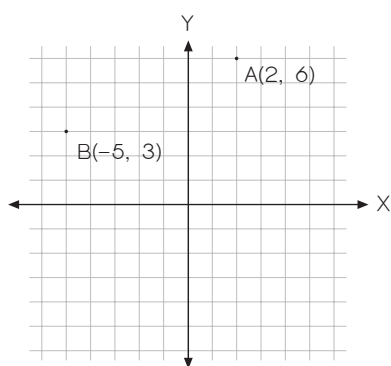
จตุภาคที่ 2 : ค่า X เป็นลบ และค่า Y มีค่าเป็นบวก

จตุภาคที่ 3 : ค่า X เป็นลบ และค่า Y มีค่าเป็นลบ

จตุภาคที่ 4 : ค่า X เป็นบวก และค่า Y มีค่าเป็นลบ



การเขียนคู่อันดับบนระบบพิกัดฉาก เช่น คู่อันดับ $A(2, 6), B(-5, 3)$ สมาชิกตัวแรกจากทั้งสองจุดนั้นคือ 2 และ -5 เมื่อนำไปพล็อตลงในกราฟนั้น จะแสดงถึงค่าของแกนแนวนอนหรือแกน X ส่วนในสมาชิก



ตัวที่สองจากจุด นั้นคือ 6 และ 3 เมื่อนำไปพล็อตลงในกราฟ ดังรูป ก็จะแสดงถึงค่าของแกนตั้งหรือแกน Y นั้นเอง และคู่อันดับ A(2, 6) มีค่า X เป็นบวก และค่า Y เป็นบวก จุด A จะอยู่บนจุดภาคที่ 1 และคู่อันดับ B(-5, 3) มีค่า X เป็นลบ และค่า Y เป็นบวก จุด B จะอยู่บนจุดภาคที่ 2

การหาระยะห่างของจุดสองจุด กำหนดให้ที่มีคู่อันดับ $A(x_1, y_1)$ และคู่อันดับ $B(x_2, y_2)$

$$\text{ความยาวของ } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

การหาพิกัดจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

$$\text{จุดกึ่งกลาง} = \text{คู่อันดับ} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



รูปแบบสมการเส้นตรง

เนื่องจากเราจะแสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปรโดยอาศัยระนาบเดียวกัน สมการจึงต้องมีตัวแปร x และ y ดังนั้น เราจะได้สมการในรูปของ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ X และ Y เป็นตัวแปร และ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เท่ากับ 0 พร้อมกัน

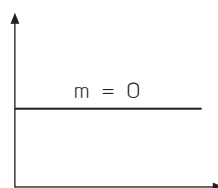
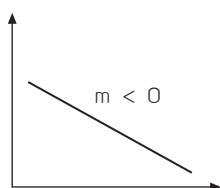
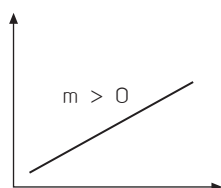
รูปทั่วไป $Ax + By + C = 0$ เมื่อจัดรูปใหม่จะได้ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

เมื่อเราแทน $-\frac{A}{B} = m$ และ $-\frac{C}{B} = c$ จะได้สมการในรูปมาตรฐาน นั่นคือ $y = mx + c$

ความชัน (Slope) $= m$ ตัดแกน X ที่ $(-\frac{c}{m}, 0)$ ตัดแกน Y ที่ $(0, c)$

การหาค่าความชัน เมื่อกำหนดจุดบนกราฟมาให้ 2 จุด ที่มีคู่อันดับเป็น (x_1, y_1)

และคู่อันดับ (x_2, y_2) ความชัน $(m) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$



ถ้า $m > 0$ กราฟจะเป็นเส้นตรงที่มีลักษณะค่อย ๆ ออกจากแกน X

$m < 0$ กราฟจะเป็นเส้นตรงที่มีลักษณะค่อย ๆ เข้าหาแกน X

$m = 0$ กราฟจะเป็นเส้นตรงที่มีลักษณะขนานกับแกน X

$b = 0$ กราฟจะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, 0)$ หรือจุดกำเนิด

การหาจุดตัดของกราฟบนแกน X ต้องกำหนดให้ $Y = 0$ ดังนั้น จุดตัดแกน X จึงเป็น $(-\frac{c}{m}, 0)$

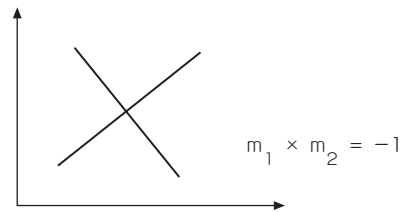
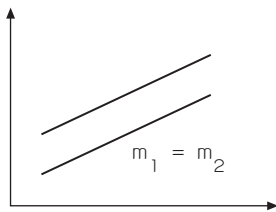
การหาจุดตัดของกราฟบนแกน Y ต้องกำหนดให้ $X = 0$ ดังนั้น จุดตัดแกน Y จึงเป็น $(0, c)$



ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรง

กำหนดให้ เส้นตรง L_1 มีรูปแบบสมการ คือ $y_1 = m_1x_1 + c_1$

และ เส้นตรง L_2 มีรูปแบบสมการ คือ $y_2 = m_2x_2 + c_2$



เส้นตรง L_1 และ L_2 จะขนานกันก็ต่อเมื่อความชันเท่ากัน หรือ $m_1 = m_2$

และเส้นตรง L_1 และ L_2 จะตัดกันเป็นมุมฉากก็ต่อเมื่อ $m_1 \times m_2 = -1$

การหาสมการเส้นตรง ที่ให้ความชันและจุดมา กำหนดให้ความชัน $= m$ และผ่านจุด (x_1, y_1)

รูปแบบสมการเชิงเส้นคือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดที่ไม่ได้อยู่ในเส้นตรง กำหนดให้เส้นตรง $Ax + By + C = 0$ กับจุด $P(x_p, y_p)$

$$\text{ระยะห่าง} = \frac{|Ax_p + By_p + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ระยะห่างระหว่างเส้นตรงที่ขนานกัน กำหนดให้เส้นตรงแรก คือ $Ax + By + C_1 = 0$ และเส้นตรงที่สอง คือ $Ax + By + C_2 = 0$

$$\text{ระยะห่างระหว่างเส้นตรงที่ขนานกัน} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรประกอบด้วย x และ y เมื่อมีสองตัวแปรแล้ว จึงจำเป็นต้องมีสมการ 2 สมการ เพื่อหาคำตอบของตัวแปร ถ้า a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ a_1, b_1 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ a_2, b_2 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันเช่นกัน จะได้

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{เป็นสมการที่ 1}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{เป็นสมการที่ 2}$$



การแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น

วิธีการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร เราสามารถแก้ปัญหได้สองวิธี

1. วิธีการแทนค่า

การแทนค่า เราจะจัดรูปสมการใดสมการหนึ่งให้อยู่ในรูปตัวแปรที่อีกสมการหนึ่งมีส่วนร่วม แล้วนำไปแทนตัวแปรนั้นในอีกสมการ เช่น

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของระบบสมการเมื่อ $5x + 2y = 16$ และ $3x - y = 3$

$$5x + 2y = 16 \quad \text{..... (1)}$$

$$3x - y = 3 \quad \text{..... (2)}$$

จาก (2),

$$-y = -3x + 3$$

$$y = 3x - 3 \quad \text{..... (2)'}$$

แทน (2)' ลงไปในสมการที่ (1), $5x + 2(3x - 3) = 16$

$$5x + 6x - 6 = 16$$

$$11x - 6 = 16$$

$$11x = 16 + 6$$

$$11x = 22$$

$$x = 2$$

แทน $x = 2$ ลงไปในสมการ (2)',

$$y = 3x - 3$$

$$y = 3(2) - 3$$

$$y = 6 - 3 = 3$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ คู่อันดับ (2, 3)

2. วิธีกำจัดตัวแปร

การกำจัดตัวแปร เราจะใช้การทำให้ตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งมีค่าเท่ากันแล้วจึงนำสมการทั้งสองไปบวกหรือลบกันให้ตัวแปรนั้นหายไป แล้วค่อยหาคำตอบทีละตัว

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของระบบสมการเมื่อ $5x + 2y = 16$ และ $3x - y = 3$

$$5x + 2y = 16 \quad \text{..... ①}$$

$$3x - y = 3 \quad \text{..... ②}$$

นำ ② $\times 2$, $2(3x - y) = 2 \times 3$

$$6x - 2y = 6 \quad \text{..... ②'}$$

นำ ① + ②', $(5x + 2y) + (6x - 2y) = 16 + 6$

$$11x = 22$$

$$x = 2$$

แทน $x = 2$ ลงไปในสมการที่ ②, $3(2) - y = 3$

$$-y = 3 - 6$$

$$-y = -3$$

$$y = 3$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ คู่อันดับ (2, 3)



คำตอบของระบบสมการ

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร จะตอบเป็นคู่อันดับ (x, y) ที่ทำให้คำตอบของระบบสมการทั้งสองเป็นจริง ซึ่งคำตอบของระบบสมการมีความเป็นไปได้ 3 กรณี

กำหนดให้ $a_1x + b_1y = c_1$ เป็นสมการที่ 1

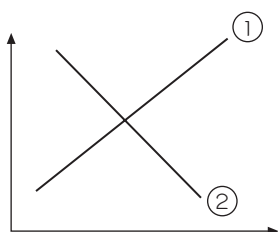
และ $a_2x + b_2y = c_2$ เป็นสมการที่ 2

กรณีที่ 1 คำตอบของระบบสมการมีเพียงคู่เดียว นั้นหมายความว่า $a_1 \neq a_2$ หรือ $b_1 \neq b_2$ ทำให้กราฟของทั้งสองสมการตัดกันเพียงจุดเดียว ระบบสมการจึงมีเพียงคำตอบเดียว

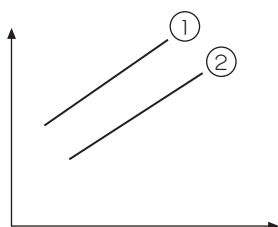
กรณีที่ 2 ระบบสมการไม่มีคำตอบ นั้นหมายความว่า $a_1 = a_2$ และ $b_1 = b_2$ และ $c_1 \neq c_2$ ทำให้กราฟของสมการทั้งสองมีความชันเท่ากัน มีจุดตัดแกน Y คนละจุดกัน ทำให้กราฟทั้งสองขนานกัน ไม่เกิดจุดตัดกันเลย จึงทำให้ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

กรณีที่ 3

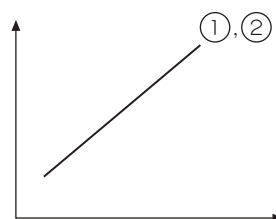
ระบบสมการมีคำตอบมากมาย นั้นหมายความว่า $a_1 = a_2$ และ $b_1 = b_2$ และ $c_1 = c_2$ มีความชัน จุดตัดแกน X จุดตัดแกน Y จุดเดียวกัน ทำให้กราฟของสมการทั้งสองทับกันสนิทพอดี จึงทำให้ระบบสมการมีมากมายหลายคำตอบ



กรณีที่ 1



กรณีที่ 2



กรณีที่ 3



โจทย์สมการเชิงเส้นสองตัวแปร

แบบธรรมดา

เราจะกำหนดตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเป็นตัวแปร x และ y จากนั้นสร้างสมการตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ แล้วจึงแก้ปัญหาของระบบสมการ โดยใช้ได้ทั้ง 2 วิธี ตามที่อธิบายไว้ในหัวข้อข้างต้น

ตัวอย่าง

สวนสนุกแห่งหนึ่งขายบัตรของผู้ใหญ่ในราคา 660 บาท และขายบัตรของเด็กในราคา 450 บาท หากสวนสนุกแห่งนี้รับจำนวนบัตรที่ขายได้ทั้งหมด พบว่าขายบัตรได้ทั้งหมด 312 ใบ และได้เงินทั้งหมด 184,290 บาท อยากทราบว่าสวนสนุกแห่งนี้ขายบัตรผู้ใหญ่และบัตรเด็กได้อย่างละกี่ใบ

ขั้นที่ 1 กำหนดสิ่งที่โจทย์ต้องการเป็นตัวแปร x และ y

กำหนดให้ : บัตรผู้ใหญ่ที่ขายได้เป็นตัวแปร x

บัตรเด็กที่ขายได้เป็นตัวแปร y

ขั้นที่ 2 สร้างสมการตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนด : ขายบัตรทั้งหมดได้ 312 ใบ ดังนั้น จะได้สมการ $x + y = 312$ เป็นสมการที่ 1

ได้เงินทั้งหมด 184,290 บาท

ดังนั้น $660x + 450y = 184,290$ เป็นสมการที่ 2

ขั้นที่ 3 แก้ปัญหาสมการ

$$x + y = 312 \quad \text{.....} \textcircled{1}$$

$$660x + 450y = 184,290 \quad \text{.....} \textcircled{2}$$

$$450(x + y) = 450 \times 312$$

$$450x + 450y = 140,400 \quad \text{.....} \textcircled{1}'$$

นำ $\textcircled{1} \times 450$,

$$\begin{aligned}
 \text{นำ } \textcircled{2} - \textcircled{1} \quad & (660x + 450y) - (450x + 450y) = 184,290 - 140,400 \\
 & 660x + 450y - 450x - 450y = 43,890 \\
 & 210x = 43,890 \\
 & x = 43,890 \div 210 \\
 & x = 209 \\
 \text{แทน } x = 209 \text{ ลงไปในสมการที่ } \textcircled{1}, \quad & 209 + y = 312 \\
 & y = 312 - 209 \\
 & y = 103
 \end{aligned}$$

ดังนั้น สวนสนุกแห่งนี้ขายบัตรผู้ใหญ่ได้ 209 ใบ และขายบัตรเด็กได้ 103 ใบ

เกี่ยวกับการทำงาน

โดยทั่วไปโจทย์จะกำหนดตัวละครสองตัวมาทำงานหนึ่งอย่าง โดยตัวละครแต่ละตัวนั้นจะใช้ระยะเวลาในการทำงานนั้นไม่เท่ากัน เราจึงต้องใช้เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรมาช่วยคำนวณ ซึ่งเราจะกำหนดให้ตัวแปร x และ y เป็นหน่วยการทำงานต่อตัวละคร 1 ตัว และช่วงเวลา 1 หน่วย จากนั้นสร้างสมการตามเงื่อนไขของโจทย์ และกำหนดสิ่งที่โจทย์ถามเป็นตัวแปรอีกตัว

ตัวอย่าง

ในการทำนา 1 แปลงของกลุ่มชาวบ้านกลุ่มหนึ่ง ถ้าใช้ผู้ชาย 11 คนและผู้หญิง 13 คน จะต้องใช้เวลาในการทำงาน 2 วันรวมกันถึงจะเสร็จ แต่ถ้าใช้ผู้ชาย 2 คนและผู้หญิง 3 คน จะใช้เวลาทำเสร็จ 10 วัน อยากทราบว่าถ้าใช้ผู้ชาย 5 คนและผู้หญิง 4 คน จะต้องใช้เวลาในการทำงานกี่วัน

ขั้นที่ 1 กำหนดตัวแปรให้ตัวละคร 1 ตัวต่อช่วงเวลา 1 วัน

ให้ผู้ชาย 1 คน ทำงาน 1 วัน ได้งาน x หน่วย

และ ให้ผู้หญิง 1 คน ทำงาน 1 วัน ได้งาน y หน่วย

ขั้นที่ 2 สร้างสมการตามเงื่อนไขของโจทย์

ผู้ชาย 11 คนและผู้หญิง 13 คน จะต้องใช้เวลาในการทำงาน 2 วัน หมายความว่า

ผู้ชายทำงาน 11 คน ทำงาน 2 วัน จะได้งานเป็นตัวแปร $22x$

ส่วนผู้หญิง 13 คน ทำงาน 2 วัน จะได้งานเป็นตัวแปร $26y$

จึงได้สมการ $22x + 26y$ เป็นสมการที่ $\textcircled{1}$

ผู้ชาย 2 คนและผู้หญิง 3 คน จะใช้เวลาทำเสร็จ 10 วัน หมายความว่า

ผู้ชายทำงาน 2 คน ทำงาน 10 วัน จะได้งานเป็นตัวแปร $20x$ ส่วนผู้หญิง 3 คน ทำงาน 10 วัน จะได้งานเป็นตัวแปร $30y$

จึงได้สมการ $20x + 30y$ เป็นสมการที่ $\textcircled{2}$

ขั้นที่ 3 กำหนดสิ่งที่ตัวแปรรายการหาเป็นตัวแปรอีกตัว นั่นคือ วันในการทำงาน กำหนดให้เป็น z วัน

ผู้ชาย 5 คนและผู้หญิง 4 คน จะต้องใช้เวลาในการทำงาน z วัน หมายความว่า
 ผู้ชาย 5 คน ใช้เวลาในการทำงาน z วัน จะได้งานเป็นตัวแปร $5xz$
 และผู้หญิง 4 คน ใช้เวลาในการทำงาน z วัน จะได้งานเป็นตัวแปร $4yz$
 จึงได้สมการ $5xz + 4yz$ เป็นสมการที่③

ขั้นที่ 4 แก้ปัญหาสมการ เนื่องจากงานทุกงานเป็นงานชิ้นเดียวกัน สมการทุกสมการ
 จึงเท่ากัน

$$22x + 26y \quad \dots\dots\dots ①$$

$$20x + 30y \quad \dots\dots\dots ②$$

$$5xz + 4yz \quad \dots\dots\dots ③$$

$$① = ②,$$

$$22x + 26y = 20x + 30y$$

$$22x - 20x = 30y - 26y$$

$$2x = 4y$$

$$x = 2y$$

$$\text{แทนค่า } x = 2y \text{ ในสมการที่ } ②, 20(2y) + 30y = 70y \quad \dots\dots\dots ④$$

$$\text{แทนค่า } x = 2y \text{ ในสมการที่ } ③, 5(2y)z + 4yz = 14yz \quad \dots\dots\dots ⑤$$

$$④ = ⑤,$$

$$70y = 14yz$$

$$\frac{70y}{14y} = z$$

$$z = 5$$

ดังนั้น ผู้ชาย 5 คน ผู้หญิง 4 คน จะใช้เวลาในการทำงาน 5 วัน

เกี่ยวกับกระแสน้ำหรือเกี่ยวกับการเดินทางที่มีลมมาเกี่ยวข้อง

เราจำเป็นต้องทราบก่อนว่า ความเร็ว (หน่วย/ชั่วโมง) = ระยะทาง (หน่วย) ÷ เวลา (ชั่วโมง)

จากนั้นระบบสมการที่เกี่ยวกับการเดินทางที่มีลมมาเกี่ยวข้อง กำหนดให้ความเร็วของการเคลื่อนที่
 ในอัตราเร็วธรรมดาเป็นตัวแปร x หน่วย/ชั่วโมง และความเร็วของลมหรือกระแสน้ำเป็นตัวแปร y หน่วย/
 ชั่วโมง จากนั้นให้คิดตามหลักความเป็นจริงว่า หากเดินทางตามกระแสน้ำหรือตามกระแสลม จะเคลื่อนไหว
 ได้เร็วขึ้น จึงเป็น $x + y$ หน่วย/ชั่วโมง และหากเดินทางทวนกระแสน้ำหรือกระแสลม จะทำให้เคลื่อนไหว
 ช้าลง จึงเป็น $x - y$ หน่วย/ชั่วโมง

ตัวอย่าง

ชาวประมงออกแล่นเรือเพื่อหาปลา แล่นเรือจากฝั่งไปยังจุดที่หาปลา ระยะทาง 117
 กิโลเมตร ซึ่งเป็นการแล่นเรือทวนกระแสน้ำใช้เวลา 2.5 ชั่วโมง จากนั้นแล่นกลับมาที่
 เส้นทางเดิมด้วยอัตราเร็วเท่าเดิมเพื่อกลับฝั่ง เป็นการแล่นเรือตามกระแสน้ำ จึงใช้เวลาเพียง
 1.5 ชั่วโมง จงหาอัตราเร็วของกระแสน้ำ

ขั้นที่ 1 กำหนดอัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่งเป็น x กิโลเมตร/ชั่วโมง

กำหนดอัตราเร็วของกระแสน้ำเป็น y กิโลเมตร/ชั่วโมง