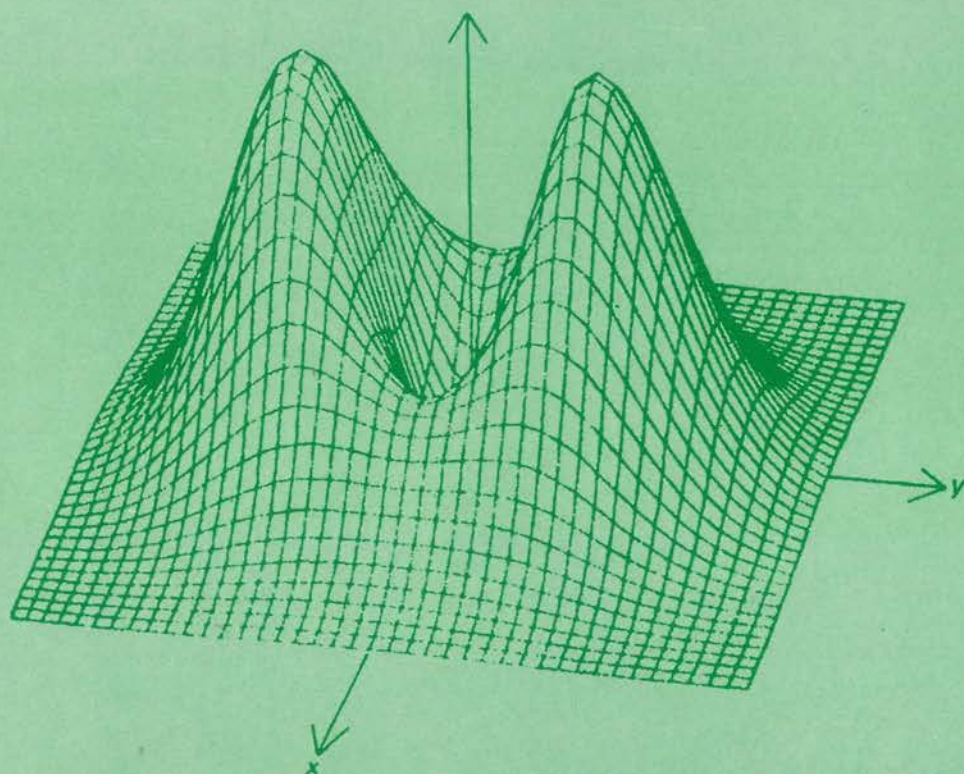


1234 แบบฝึกหัดและเทคนิค การแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัส

EXERCISES AND TECHNICAL SOLUTION IN CALCULUS



**FUNCTION
LIMITS
DIFFERENTIAL
INTEGRATION
PARTIAL DERIVATIVES**

แบบฝึกหัดการแก้ปัญหาโจทย์
พร้อมรายละเอียด วิธีการหาคำตอบ

วิชัย ทิพนีย์
รัชเมธี รัชนิพันธ์

1234 แบบฝึกหัดและเทคนิคการแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัส

EXERCISES AND TECHNICAL SOLUTION IN CALCULUS

สูตรการหาอนุพันธ์

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\frac{d}{dx}(u + v + w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(cu) = c \cdot \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c} \frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
10. $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx}(u^v) = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v \frac{dv}{dx}$
13. $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$
17. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
18. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$
19. $\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
20. $\frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
21. $\frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
22. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
23. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
24. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$

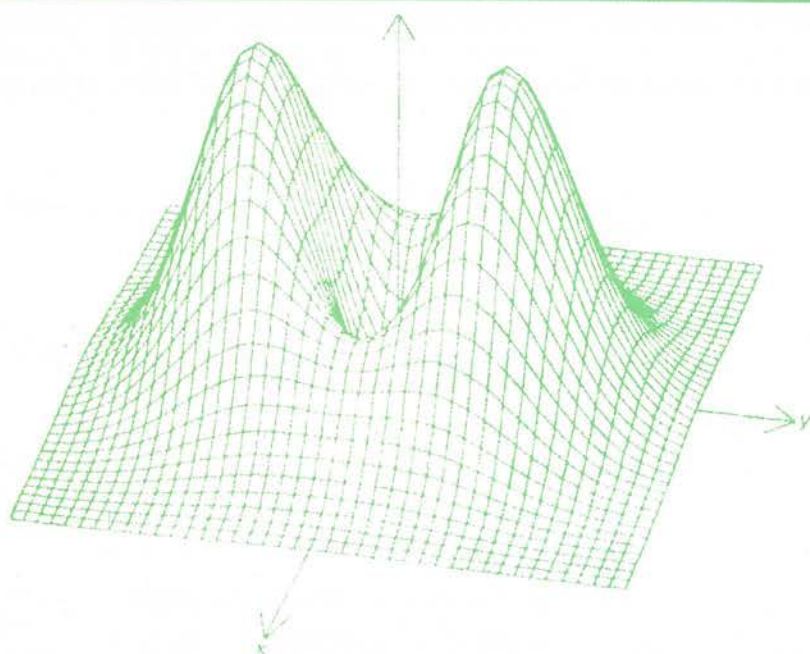
สูตรเบื้องต้นในการอินทิเกรต

1. $\int 0 \, du = 0$
2. $\int a \, du = a \int du$
3. $\int dx = x + c$
4. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
5. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$
6. $\int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + c$
7. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
8. $\int e^u \, du = e^u + c$
9. $\int \sin u \, du = -\cos u + c$
10. $\int \cos u \, du = \sin u + c$
11. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$
12. $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\cot u + c$
13. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$
14. $\int \operatorname{cosec} u \cot u \, du = -\operatorname{cosec} u + c$
15. $\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + c$
16. $\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + c$
17. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + c$
18. $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln |\operatorname{cosec} u - \cot u| + c$
19. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c$
20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$
21. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c$
22. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$
23. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$
24. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$
25. $\int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + c$
26. $\int \sqrt{u^2 + a^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$
27. $\int \sqrt{u^2 - a^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$
28. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + c$



แบบฝึกหัดและเทคนิค การแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัส

EXERCISES AND TECHNICAL SOLUTION IN CALCULUS



**FUNCTION
LIMITS
DIFFERENTIAL
INTEGRATION
PARTIAL DERIVATIVES**

แบบฝึกหัดการแก้ปัญหาโจทย์
พร้อมรายละเอียด วิธีการหาคำตอบ

วิชัย ทิพนีย์
รัชเมธี รัชนิพันธ์

1234 แบบฝึกหัดและเทคนิคการแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัส

1234 EXERCISES AND TECHNICAL SOLUTION IN CALCULUS

ISBN 974-89011-1-4

สงวนลิขสิทธิ์ตาม พ.ร.บ. ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2521

ห้ามการลอกเลียนแบบไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้
นอกจากจะได้รับอนุญาต

วิชัย ทิพนิตย์ : รัชเมธี รัชนิพนธ์

พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2538

จำนวนพิมพ์ 1,000 เล่ม

ติดต่อซื้อหรือสั่งเพื่อจำหน่ายได้ที่ :

23 บุ๊คเซนเตอร์

245/82-85 ถ.อรุณอมรินทร์ บางยี่ขัน บางพลัด กทม. 10700

โทร. 4337391-4 โทรสาร 4337307 สาขาปิ่นเกล้า โทร. 4343392

หรือโปรดสั่งทางตัวแลกเงินไปรษณีย์ 270 บาท มาที่ นายวิชัย ทิพนิตย์

1/12 หมู่ 1 ซอยวัดกก ถนนพระรามที่ 2 แขวงท่าข้าม เขตบางขุนเทียน กทม. 10150

ติดต่อสอบถามเนื้อหาในเล่ม : วิชัย ทิพนิตย์ โทร. 01-4438623

ออกแบบการจัดรูปเล่ม : วิชัย ทิพนิตย์ โทร. (02) 898-5360 (หลัง 19.30 น.)

พิมพ์ที่ : บริษัท ที.พี.พรินท์ จำกัด 187/25 ซอยสุวิธานดำริ ถนนอรุณอมรินทร์

แขวงบางยี่ขัน บางพลัด กรุงเทพฯ 10700 โทร. 433-0026-7

นายอนันต์ ศรีจำพันธ์ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา

คำนำ

1234 แบบฝึกหัดและเทคนิคการแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัส เล่มนี้ที่เขียนขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอน (วิชาแคลคูลัส) ในวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงในชั้นอุดมศึกษา ซึ่งนับว่าเป็นหัวใจสำคัญทางคณิตศาสตร์ประยุกต์เพื่อใช้กับสาขาวิชาการต่าง ๆ โดยเฉพาะในสาขาวิศวกรรมศาสตร์ บริหารธุรกิจเศรษฐศาสตร์ แพทยศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เป็นต้น ตลอดจนนำไปใช้ในการศึกษาค้นคว้าและงานวิจัยเฉพาะด้านได้เป็นอย่างดี

รูปแบบของการจัดทำหนังสือ 1234 แบบฝึกหัดและเทคนิคการแก้ปัญหาแคลคูลัส นี้ ได้ยึดหลักการจัดรูปแบบให้เป็นสัดส่วนสะดวกต่อการศึกษาและทำความเข้าใจในแต่ละข้อ มีแนวความคิดในการแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัสเสริมเข้าไปให้ชัดเจน และสอดคล้องกับสูตรหรือทฤษฎีและหลักการในการคำนวณนั้น โดยได้วางรูปแบบเป็นทฤษฎีหรือสูตรที่ใช้ในการคำนวณ; ปัญหาโจทย์; แนวทางความคิดปัญหาโจทย์หรือวิธีหาคำตอบ; แบบฝึกหัดการแก้ปัญหาโจทย์และเฉลยปัญหาโจทย์ทางแคลคูลัส เริ่มตามลำดับในแต่ละหัวเรื่องได้เป็นความอย่างต่อเนื่อง โดยเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ได้เน้นหนักเนื้อหาเรื่องดังต่อไปนี้

FUNCTION; LIMITS; DIFFERENTIAL; INTEGRATION AND PARTIAL DERIVATIVES

ผู้เขียนได้พยายามจัดรูปแบบต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาซึ่งเป็นรูปแบบหนังสือในแนวความคิดใหม่เพื่อให้หนังสือมีความสมบูรณ์ สามารถทำความเข้าใจง่ายและอ่านง่ายด้วยตัวเอง ในระยะเวลาอันสั้น และเป็นการแสดงให้เห็นชัดเจนสำหรับการทำแบบฝึกหัดแก้ปัญหาโจทย์ทางแคลคูลัสได้เป็นอย่างดี เพื่อให้เป็นประโยชน์แก่ผู้ศึกษาด้วยตนเอง ผู้อ่านหรือนักศึกษาควรต้องทำและพยายามทำให้ครบทุกข้อ เพราะในแต่ละข้อได้แสดงให้เห็นปัญหาโจทย์ในแต่ละแง่มุมความคิดของแต่ละข้อในตัวของมันเองอย่างมีประสิทธิภาพ และคณาจารย์ผู้สอน

วิชานี้ก็สามารถนำแบบฝึกหัดในเล่มนี้ไปให้นักศึกษาทดลองทำได้ หากผู้อ่านพบข้อบกพร่อง
ที่ควรแก้ไขในหนังสือเล่มนี้ กรุณาเสนอแนะให้ผู้เขียนทราบด้วย จักเป็นพระคุณอย่างยิ่ง
เพื่อผู้เขียนได้นำไปปรับปรุงให้ดีขึ้นสำหรับการพิมพ์ครั้งต่อไป

ผู้เขียนเองขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานในภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยสยาม และผู้บังคับบัญชาทุกระดับชั้น ที่ได้ให้การสนับสนุนในการจัดทำหนังสือ
เล่มนี้เสมอมา พร้อมทั้งขอบคุณฝ่ายคอมพิวเตอร์กราฟิกของบริษัท สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด ที่ช่วย
ให้ความอนุเคราะห์ในการจัดทำต้นฉบับของรูปเล่ม มา ณ โอกาสนี้ด้วย

วิชัย ทิพนิตย์

รัชเมธี รัชนิพนธ์

ธันวาคม 2535

สารบัญ

สรุปสูตรที่นำมาใช้ในรูปแบบต่าง ๆ.....	A-I
Functions.....	1
Limits.....	14
The Derivative by Four-Step Rule.....	30
Differentiation of Algebraic Functions.....	41
The Chain Rule.....	56
Differentiation of Implicit Functions.....	66
Derivatives of Higher Orders.....	76
Differentiation of Exponential and Logarithmic Functions.....	90
Differentiation of Trigonometric and Inverse Trigonometric Functions.....	106
Indeterminate Forms.....	148
Basic Integration.....	167
Integrate Exponential and Logarithmic Functions.....	177
Integration of Trigonometric Functions.....	189
Integration of Inverse Trigonometric Functions.....	210
Integrate by Parts.....	223
Integrate by Trigonometric Substitutions.....	251
Integrate by Partial Fraction.....	273
Multiple Integration.....	293
Plane Areas by Integration.....	330
Areas by Definite Double Integrals.....	347
Volumes of Solids of Revolution.....	364
Length of Arc.....	383
Partial Derivatives.....	393
Total Differential.....	408
Total Derivatives and The Chain Rule for Functions.....	415
Partial Derivative of Implicit Functions.....	427
Partial Derivative of Higher Order.....	438
Introduction to The Foreign Reference Books about Calculus.....	449

สรุปสูตรที่นำมาใช้ในรูปแบบต่าง ๆ

เศษส่วนและอัตราส่วน

กำหนดให้ $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ และ $d \neq 0$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

และถ้า $a : b = c : d$ หรือ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ หรือ $ad = bc$

จะได้ว่า $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\frac{ma}{mb} = \frac{nc}{nd}; \frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}; \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

คุณสมบัติของเลขชี้กำลัง

$$1. a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$2. a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$3. (a^x)^y = a^{xy}$$

$$4. a^0 = 1; a \neq 0$$

$$5. a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$6. (ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$7. \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$8. \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$9. \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

สรุปสูตรที่นำมาใช้ในรูปแบบต่าง ๆ

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^2 + b^2 = (a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1})$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)$$

คุณสมบัติของลอการิทึม

$$1. \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$2. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$3. \log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$4. \log_a 1 = 0$$

$$5. \log_a a = 1$$

$$6. \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$1. \sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1$$

$$2. \cos x \cdot \sec x = 1$$

$$3. \tan x \cdot \cot x = 1$$

$$4. \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$5. \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$6. \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$7. 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$8. 1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

สูตรคูณที่นำมาใช้ในรูปแบบต่าง ๆ

$$9. \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$10. \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$11. \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$12. \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} 13. \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$14. \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$15. \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$16. \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$17. \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} |\sin(x+y) + \sin(x-y)|$$

$$18. \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} |\cos(x+y) - \cos(x-y)|$$

$$19. \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} |\cos(x+y) + \cos(x-y)|$$

ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่ควรทราบ

	0°	90°	180°	270°	360°	30°	45°	60°
sin	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	0	หาค่าไม่ได้	0	หาค่าไม่ได้	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

สรุปสูตรที่นำมาใช้ในรูปแบบต่าง ๆ

เส้นตรง

สมการทั่วไปคือ $Ax + By = C$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงที่

วงกลม

สมการมาตรฐาน $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ จุดศูนย์กลาง (h, k)

สมการทั่วไป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

พาราโบลา

ลักษณะรูป สมการ	สมการมาตรฐาน		สมการทั่วไป
	จุดยอด $(0, 0)$	จุดยอด (h, k)	
หงาย	$x^2 = 4py$	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$x^2 + Dx + Ey + F = 0$
คว่ำ	$x^2 = -4py$	$(x - h)^2 = -4p(y - k)$	
ตะแคงขวา	$y^2 = 4px$	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	$y^2 + Dx + Ey + F = 0$
ตะแคงซ้าย	$y^2 = -4px$	$(y - k)^2 = -4p(x - h)$	

วงรี

ลักษณะรูป สมการ	สมการมาตรฐาน		สมการทั่วไป
	จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$	จุดศูนย์กลาง (h, k)	
แกนยาวทับหรือ ขนานแกน x	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$
แกนยาวทับหรือ ขนานแกน y	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$	

สรุปสูตรที่นำมาใช้ในรูปแบบต่าง ๆ

ไฮเพอร์โบลา

สมการ ลักษณะรูป	สมการมาตรฐาน		สมการทั่วไป
	จุดศูนย์กลาง (0, 0)	จุดศูนย์กลาง (h, k)	
แกนขวางทับหรือ ขนานแกน x	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$Ax^2 - By^2 + Dx + Ey + F = 0$
แกนขวางทับหรือ ขนานแกน y	$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	

สูตรการหาอนุพันธ์

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- $\frac{d}{dx}(x) = 1$
- $\frac{d}{dx}(u + v + w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(cu) = c \cdot \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c} \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(f(u)) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

สรุปสูตรที่นำมาใช้ในรูปแบบต่าง ๆ

$$10. \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$11. \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$12. \frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + \ln u \cdot v \frac{dv}{dx}$$

$$13. \frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$14. \frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$15. \frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$16. \frac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$17. \frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$18. \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$19. \frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$20. \frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$21. \frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$22. \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$23. \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$24. \frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

สรุปสูตรที่นำมาใช้ในรูปแบบต่าง ๆ

สูตรเบื้องต้นในการอินทิเกรต

1. $\int 0 \, du = 0$
2. $\int a \, du = a \int du$
3. $\int dx = x + c$
4. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
5. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$
6. $\int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + c$
7. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
8. $\int e^u \, du = e^u + c$
9. $\int \sin u \, du = -\cos u + c$
10. $\int \cos u \, du = \sin u + c$
11. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$
12. $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\cot u + c$
13. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$
14. $\int \operatorname{cosec} u \cot u \, du = -\operatorname{cosec} u + c$
15. $\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + c$
16. $\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + c$
17. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + c$
18. $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln |\operatorname{cosec} u - \cot u| + c$
19. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c$
20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$
21. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c$

สรุปสูตรที่นำมาใช้ในรูปแบบต่าง ๆ

$$22. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$$

$$23. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$$

$$24. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$$

$$25. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + c$$

$$26. \int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$$

$$27. \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$$

$$28. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + c$$

เทคนิคการอินทิเกรต

การอินทิเกรตที่ละส่วน ใช้เมื่อโจทย์อยู่ในรูปผลคูณ ผลหารของฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

สูตรการอินทิเกรตที่ละส่วนคือ

$$\int u dv = uv - \int v du$$

การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตรีโกณ ใช้เมื่อในโจทย์มีนิพจน์ $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$ ประกอบอยู่ และมีหลักการสมมุติดังนี้

ถ้าในโจทย์มีรูป $\sqrt{a^2 - u^2}$ ให้สมมุติ $u = a \sin \theta$

ถ้าในโจทย์มีรูป $\sqrt{a^2 + u^2}$ ให้สมมุติ $u = a \tan \theta$

ถ้าในโจทย์มีรูป $\sqrt{u^2 - a^2}$ ให้สมมุติ $u = a \sec \theta$

รูปแบบการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง

$$1. \int \sin^n x dx \text{ และ } \int \cos^n x dx$$

$$2. \int \sin^m x \cos^n x dx$$

สรุปสูตรที่นำมาใช้ในรูปแบบต่าง ๆ

3. $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$ และ $\int \cos mx \cos nx \, dx$
4. $\int \tan^n x \, dx$ และ $\int \cot^n x \, dx$
5. $\int \sec^n x \, dx$ และ $\int \operatorname{cosec}^n x \, dx$
6. $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ และ $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx$

พื้นที่บนระนาบ (A)

สูตร	ระหว่างเส้นโค้งและแกน		ระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้น	
	Strip ขนานแกน y	Strip ขนานแกน x	Strip ขนานแกน y	Strip ขนานแกน x
A	$\pm \int_a^b y \, dx$ เหนือแกน x ใช้ + ใต้แกน x ใช้ -	$\pm \int_c^d x \, dy$ ขวาแกน y ใช้ + ซ้ายแกน y ใช้ -	$\int_a^b (y_2 - y_1) \, dx$	$\int_c^d (x_2 - x_1) \, dy$

ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน (V)

โดยวิธีจาน สูตร $V = \pi \int_a^b (\text{รัศมี})^2 (\text{ความหนา})$

โดยวิธีเปลือกทรงกระบอก สูตร $V = 2\pi \int_a^b (\text{รัศมี})(\text{ความสูง})(\text{ความหนา})$

1

FUNCTIONS

ปัญหาโจทย์	โจทย์
ข้อที่ 0001	ถ้า $F(x) = x^2 - 5x - 3$ จงหาค่า $F(2)$
ข้อที่ 0002	ถ้า $F(\theta) = \sin 2\theta + \cos \theta$ จงหาค่า $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$
ข้อที่ 0003	ถ้า $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ จงพิสูจน์ว่า $f(2) = f(5)$
ข้อที่ 0004	กำหนดให้ $\phi(z) = 4^z$ จงพิสูจน์ว่า $\phi(z+1) - \phi z = 3\phi(z)$
ข้อที่ 0005	ถ้า $f(x) = z^x$ จงพิสูจน์ว่า $f(y) \cdot f(z) = f(y+z)$
ข้อที่ 0006	ถ้า $F(x) = \log_a \frac{1}{x}$ จงพิสูจน์ว่า $F(a^3) = -3$
ข้อที่ 0007	ถ้า $f(x) = x^2 - 3x + 5$ จงหาค่า $f(0)$; $f(-3)$
ข้อที่ 0008	ถ้า $F(\theta) = \sin 2\theta - \cos \theta$ จงหาค่า $F(0)$; $F(\pi)$
ข้อที่ 0009	ถ้า $G(y) = \frac{2y+3}{y-1}$ จงหาค่า $G(y+3) - G(y-1)$
ข้อที่ 0010	ถ้า $F(z) = \log \frac{2z+5}{z+3}$ จงหาค่า $2F(3)$; $3F(-1)$
ข้อที่ 0011	ถ้า $F(x) = 2^x$ จงหาค่า $F(x+3)/F(x-1)$
ข้อที่ 0012	กำหนดให้ $F(x) = x^3 + 3x$ จงหาค่า $F(x+h) - F(x)$
ข้อที่ 0013	กำหนดให้ $F(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ จงพิสูจน์ว่า $F(7) = 5F(-1)$
ข้อที่ 0014	กำหนดให้ $F(\theta) = 2 \sin \theta + 5 \cos \theta$ จงหาค่า $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$
ข้อที่ 0015	กำหนดให้ $F(t) = t^3 - 5t^2 - 4t + 20$ จงคำนวณหาค่า $F(t+1)$
ข้อที่ 0016	กำหนดให้ $G(x) = 3^x$ จงพิสูจน์ว่า $G(x+2) - G(x) = 8G(x)$
ข้อที่ 0017	กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ จงพิสูจน์ว่า $f(x+h) - f(x) = \frac{-h}{x^2 + xh}$

FUNCTIONS

ปัญหาโจทย์	โจทย์
ข้อที่ 0018	ถ้า $f(x) = \log x$ จงพิสูจน์ว่า $f\left(\frac{u}{v}\right) = f(u) - f(v)$
ข้อที่ 0019	ถ้า $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ จงพิสูจน์ว่า $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ และ $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$
ข้อที่ 0020	กำหนดให้ $f(x) = \cos x$ จงหาค่า $f(x+2h) - f(x)$

FUNCTIONS

ปัญหาโจทย์ข้อที่

0001

วิธีแก้ปัญหาคำโจทย์

ถ้า $F(x) = x^2 + 5x - 3$ จงหาค่า $F(2)$

$$F(x) = x^2 + 5x - 3$$

หาค่า $F(2)$ โดยการนำค่า 2 แทนค่า x ลงใน $F(x)$

$$F(2) = (2)^2 + 5(2) - 3 = 4 + 10 - 3 = 11$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่

0002

วิธีแก้ปัญหาคำโจทย์

ถ้า $F(\theta) = \sin 2\theta + \cos \theta$ จงหาค่า $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$F(\theta) = \sin 2\theta + \cos \theta$$

หาค่า $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ โดยการนำค่า $\frac{\pi}{2}$ แทนค่า θ ลงใน $F(\theta)$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2} \\ &= \sin \pi + \cos \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่

0003

วิธีแก้ปัญหาคำโจทย์

ถ้า $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ จงพิสูจน์ว่า $f(2) = f(5)$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$$

$$f(2) = 2^3 - (5 \cdot 2^2) - (4 \cdot 2) + 20$$

$$= 8 - 20 - 8 + 20 = 0$$

$$f(5) = 5^3 - (5 \cdot 5^2) - (4 \cdot 5) + 20$$

$$= 125 - 125 - 20 + 20 = 0$$

$\therefore f(2) = f(5)$ เป็นจริงตามข้อพิสูจน์

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0004

วิธีแก้ปัญหาคำถาม

นำ (2) - (1);

กำหนดให้ $\phi(z) = 4^z$ จงพิสูจน์ว่า $\phi(z+1) - \phi(z) = 3\phi(z)$

$$\phi(z) = 4^z \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\phi(z+1) = 4^{z+1} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\begin{aligned} \phi(z+1) - \phi(z) &= 4^{z+1} - 4^z \\ &= 4^z + 4^1 - 4^z \\ &= 4^z(4 - 1) \\ &= 3(4)^z \end{aligned}$$

$$\therefore \phi(z+1) - \phi(z) = 3\phi(z)$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0005

วิธีแก้ปัญหาคำถาม

ถ้า $f(x) = z^x$ จงพิสูจน์ว่า $f(y) \cdot f(z) = f(y+z)$

$$f(x) = z^x$$

$$f(y) = z^y$$

$$f(z) = z^z$$

$$f(y) \cdot f(z) = z^y \cdot z^z = z^{y+z}$$

$$f(y+z) = z^{(y+z)}$$

$$\therefore f(y) \cdot f(z) = f(y+z) \text{ เป็นจริงตามข้อพิสูจน์}$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0006

วิธีแก้ปัญหาคำถาม

$$\log_a a = 1$$

ถ้า $F(x) = \log_a \frac{1}{x}$ จงพิสูจน์ว่า $F(a^3) = -3$

$$F(x) = \log_a \frac{1}{x}$$

$$F(a^3) = \log_a \frac{1}{a^3}$$

$$= \log_a a^{-3}$$

$$= -3 \log_a a = -3$$

$$F(a^3) = -3 \text{ เป็นจริงตามข้อพิสูจน์}$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0007

วิธีแก้ปัญหาคำโจทย์

ถ้า $f(x) = x^2 - 3x + 5$ จงหาค่า $f(0)$; $f(-3)$

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$f(0) = 0^2 - 3(0) + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$$

$$f(-3) = (-3)^2 - 3(-3) + 5 = 9 + 9 + 5 = 23$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0008

วิธีแก้ปัญหาคำโจทย์

ถ้า $F(\theta) = \sin 2\theta - \cos \theta$ จงหาค่า $F(0)$ และ $F(\pi)$

$$F(\theta) = \sin 2\theta - \cos \theta$$

$$F(0) = \sin 2 \cdot 0^\circ - \cos 0^\circ$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$$F(\pi) = \sin 2\pi - \cos \pi$$

$$= 0 - (-1) = 1$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0009

วิธีแก้ปัญหาคำโจทย์

ถ้า $G(y) = \frac{2y+3}{y-1}$ จงหาค่า $G(y+3) - G(y-1)$

$$G(y) = \frac{2y+3}{y-1}$$

$$G(y+3) = \frac{2(y+3)+3}{(y+3)-1} = \frac{2y+9}{y+2}$$

$$G(y-1) = \frac{2(y-1)+3}{(y-1)-1} = \frac{2y+1}{y-2}$$

$$\begin{aligned} G(y+3) - G(y-1) &= \frac{(2y+9)}{y+2} - \frac{(2y+1)}{y-2} \\ &= \frac{(2y+9)(y-2) - (2y+1)(y+2)}{(y+2)(y-2)} \\ &= \frac{2y^2 + 5y - 18 - (2y^2 + 5y + 2)}{y^2 - 4} \\ &= \frac{-20}{y^2 - 4} \end{aligned}$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0010

วิธีแก้ปัญหาคำโจทย์

ถ้า $F(z) = \log \frac{2z+5}{z+3}$ จงหาค่า $2F(3)$; และ $3F(-1)$

$$F(z) = \log \frac{2z+5}{z+3}$$

$$F(3) = \log \frac{2(3)+5}{3+3} = \log \frac{11}{6}$$

$$2F(3) = 2 \log \frac{2(3)+5}{3+3} = 2 \log \frac{11}{6}$$

$$F(-1) = \log \frac{2(-1)+5}{-1+3} = \log \frac{3}{2}$$

$$3F(-1) = 3 \log \frac{3}{2}$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0011

วิธีแก้ปัญหาคำโจทย์

ถ้า $F(x) = 2^x$ จงหาค่า $F(x+3)/F(x-1)$

$$F(x) = 2^x$$

$$F(x+3) = 2^{x+3}$$

$$F(x-1) = 2^{x-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{F(x+3)}{F(x-1)} &= \frac{2^{x+3}}{2^{x-1}} = \frac{2^x \cdot 2^3}{2^x \cdot 2^{-1}} \\ &= \frac{2^3}{2^{-1}} = 2^{3-(-1)} = 2^{3+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{F(x+3)}{F(x-1)} = 2^4 = 16$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0012

วิธีแก้ปัญหาคำโจทย์

กำหนดให้ $F(x) = x^3 + 3x$ จงหาค่า $F(x+h) - F(x)$

$$F(x) = x^3 + 3x$$

$$F(x+h) = (x+h)^3 + 3(x+h)$$

$$= (x+h)(x^2 + 2xh + h^2) + 3(x+h)$$

$$F(x+h) = x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3 + 3x + 3h$$

$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3x + 3h$$

$$F(x+h) - F(x) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3x + 3h - x^3 - 3x$$

$$= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3h$$

$$= 3x^2h + 3h + 3xh^2 + h^3$$

$$= 3(x^2 + 1)h + 3xh^2 + h^3$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0013

วิธีแก้ปัญหาคำถาม

กำหนดให้ $F(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ จงพิสูจน์ว่า $F(7) = 5F(-1)$

$$F(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$$

$$F(7) = 7^3 - 5(7)^2 - 4 \cdot (7) + 20 = 90$$

$$F(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 - 4(-1) + 20 = 18$$

$$5F(-1) = 5 \times 18 = 90$$

$$F(7) = 5F(-1)$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0014

วิธีแก้ปัญหาคำถาม

กำหนดให้ $F(\theta) = 2 \sin \theta + 5 \cos \theta$ จงหาค่า $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ และ $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$F(\theta) = 2 \sin \theta + 5 \cos \theta$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} + 5 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{5}{2}$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} + 5 \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+5)$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0015

วิธีแก้ปัญหาคำถาม

กำหนดให้ $F(t) = t^3 - 5t^2 - 4t + 20$ จงคำนวณหาว่า $F(t+1)$

$$F(t) = t^3 - 5t^2 - 4t + 20$$

$$F(t+1) = (t+1)^3 - 5(t+1)^2 - 4(t+1) + 20$$

$$= [(t+1)(t^2+2t+1)] - [5(t^2+2t+1)] - 4t - 4 + 20$$

$$= t^3 + 2t^2 + t + t^2 + 2t + 1 - 5t^2 - 5t - 5t - 4t - 4 + 16$$

$$= t^3 - 2t^2 - 11t + 12$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่

0016

วิธีแก้ปัญหาโจทย์

กำหนดให้ $G(x) = 3^x$ จงพิสูจน์ว่า $G(x+2) - G(x) = 8G(x)$

$$G(x) = 3^x \text{ และ } G(x+2) = 3^{x+2}$$

$$\therefore G(x+2) - G(x) = 3^{x+2} - 3^x$$

$$= 3^x \cdot 3^2 - 3^x$$

$$= 3^x(3^2 - 1) = 8(3^x)$$

$$\therefore G(x+2) - G(x) = 8G(x) \text{ เป็นจริงตามข้อพิสูจน์}$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่

0017

วิธีแก้ปัญหาโจทย์

กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ จงพิสูจน์ว่า $f(x+h) - f(x) = \frac{-h}{x^2 + xh}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ และ } f(x+h) = \frac{1}{x+h}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x - (x+h)}{x^2 + xh}$$

$$= \frac{-h}{x^2 + xh}$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่

0018

วิธีแก้ปัญหาโจทย์

ถ้า $f(x) = \log x$ จงพิสูจน์ว่า $f\left(\frac{u}{v}\right) = f(u) - f(v)$

$$f(x) = \log x \quad \left| \quad f\left(\frac{u}{v}\right) = \log \frac{u}{v}\right.$$

$$f(u) = \log u \quad \left| \quad = \log u - \log v\right.$$

$$f(v) = \log v; \quad f(u) - f(v) = \log u - \log v$$

$$\therefore f\left(\frac{u}{v}\right) = f(u) - f(v) \text{ เป็นจริง}$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่
0019

วิธีแก้ปัญหาคำถาม

ถ้า $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ จงพิสูจน์ว่า $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

และ $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1+x}{x}}$$

$$= \frac{1-x}{x} \cdot \frac{x}{1+x}$$

$$= \frac{1-x}{1+x}$$

$$-f(x) = -\left[\frac{x-1}{x+1}\right] = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) = \frac{1-x}{1+x} \text{ เป็นจริงตามข้อพิสูจน์}$$

และ $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = \frac{\frac{-1-x}{x}}{\frac{-1+x}{x}}$$

$$= \frac{-1-x}{x} \cdot \frac{x}{-1+x}$$

$$= \frac{-1-x}{-1+x} = \frac{-x-1}{x-1}$$

$$-\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = -\left[\frac{x+1}{x-1}\right] = \frac{-x-1}{x-1}$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{f(x)} = \frac{-x-1}{x-1} \text{ เป็นจริงตามข้อพิสูจน์}$$

ปัญหาโจทย์ข้อที่

0020

วิธีแก้ปัญหาโจทย์

กำหนดให้ $f(x) = \cos x$ จงหาค่า $f(x+2h) - f(x)$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x+2h) = \cos(x+2h)$$

$$f(x+2h) - f(x) = \cos(x+2h) - \cos x$$

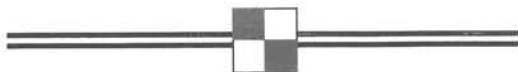
$$\left(\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2} \right)$$

$$\text{และ } (\sin - A = -\sin A)$$

$$\therefore f(x+2h) - f(x) = 2 \sin \frac{(x+2h+x)}{2} \sin \frac{(x-x-2h)}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{(2x+2h)}{2} \sin -\frac{2h}{2}$$

$$= -2 \sin(x+h) \sin h$$



ปัญหาโจทย์ข้อที่ 0021-0040

ข้อที่	โจทย์
0021	กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ จงหาค่าของ $f(1)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(a)$, $f(a+h)$
0022	ถ้า $f(x) = \frac{1}{x}$ จงหาค่าของ $f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f\left(-\frac{2}{3}\right)$
0023	กำหนดให้ $g(x) = x - x$ จงหาค่าของ $g(1)$, $g(-1)$, $g(-54)$
0024	กำหนดให้ $f(x) = x/ x $ ถ้า $x \neq 0$ จงหาค่าของ $f(1)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f\left(-\frac{4}{3}\right)$
0025	กำหนดให้ $f(x) = x + x $ จงหาค่าของ $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$, $f(-4)$, $f(-5)$
0026	กำหนดให้ $f(x) = 2x + x^2 - 5$ จงหาค่าของ $f(1)$, $f(-1)$, $f(x+1)$
0027	กำหนดให้ $F(\theta) = 2 \sin \theta$ จงหาค่าของ $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $F(0)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$
0028	กำหนดให้ $F(\theta) = \cos \theta$ จงหาค่าของ $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $F(0)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $F(\pi)$
0029	กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x-2}$ และ $g(x) = 2x+1$ จงหา $(f+g)(x)$, $(f-g)x$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
0030	กำหนดให้ $F(x) = \frac{1}{x^2+5}$ จงหาค่าของ $f(-a)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(\sqrt{a})$, $f(a^2)$
0031	จงหาค่าของ a ถ้า $g(a) = 5$ กำหนดให้ $g(x) = 3x+4$
0032	จงหาค่าของ a ถ้า $g(a) = 5$ กำหนดให้ $g(x) = \sqrt{x^2+16}$
0033	จงหาค่าของ $f(a+h) - f(a)$ กำหนดให้ $f(x) = 3x-2$
0034	จงหาค่าของ $f(a+h) - f(a)$ กำหนดให้ $f(x) = x^2$
0035	จงหาค่าของ $f(a+h) - f(a)$ กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$
0036	จงหาค่าของ (a) $f(-3)$, (b) $f(a^2)$, (c) $f(2x-3)$ กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 3x + 2$

ปัญหาโจทย์ข้อที่ 0021-0040

ข้อที่	โจทย์
0037	จงหาค่าของ $g(10)$, $g(0)$ และ $g\left(-\frac{18}{5}\right)$ กำหนดให้ $g(t) = \begin{cases} 1; & t > 0 \\ 0; & t = 0 \\ -1; & t < 0 \end{cases}$
0038	จงหาค่าของ $h(4)$, $h\left(-\frac{1}{2}\right)$ และ $h\left(\frac{1}{2}\right)$ กำหนดให้ $h(p) = \begin{cases} p; & -1 \leq p < 0 \\ 3-p; & 0 \leq p < 3 \\ 2p^2; & 3 \leq p \leq 5 \end{cases}$
0039	จงหาค่าของ $(f+g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f+g)(2)$ กำหนดให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x^2 + x$
0040	จงหาค่าของ $g[f(2)]$, $f[g(3)]$, $f[g(a-1)]$ กำหนดให้ $f(x) = 2x-3$ และ $g(x) = x^2+5$

เฉลยปัญหาโจทย์ข้อที่ 0021-0040

ข้อที่	คำตอบ	ข้อที่	คำตอบ
0021	$0, -1, 3, (a+h)^2 - 4(a+h) + 3$	0031	$\frac{1}{3}$
0022	$\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}$	0032	$3, -3$
0023	$0, 2, 108$	0033	$3h$
0024	$1, 1, -1, -1$	0034	$2ah + h^2$
0025	$1, 4, 0, 0$	0035	$-h/a(a+h)$
0026	$-2, -6, x^2 + 4x - 2$	0036	(a) 20 , (b) $a^4 - 3a^2 + 2$, (c) $4x^2 - 18x + 20$
0027	$2, 0, \sqrt{3}$	0037	$0, 0, -1$
0028	$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1$	0038	$32, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$
0029	$\sqrt{x-2} + 2x + 1, \sqrt{x-2} - 2x - 1,$ $\sqrt{x-2}(2x+1), \sqrt{x-2}/(2x+1)$	0039	$2x^2 + x, \frac{x^2}{x^2+x}, 10$
0030	$\frac{1}{(a+5)}, \frac{1}{(a^4+5)}, \frac{1}{(a^2+5)},$ $\frac{a^2}{(5a^2+1)}$	0040	$6, 25, 2a^2 - 4a + 9$

2

LIMITS

ปัญหาโจทย์	โจทย์
ข้อที่ 0041	จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
ข้อที่ 0042	จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$
ข้อที่ 0043	จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$
ข้อที่ 0044	จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 6}$
ข้อที่ 0045	จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{3 - \sqrt{x^2 - 7}}$
ข้อที่ 0046	จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{5}{4}$
ข้อที่ 0047	จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$
ข้อที่ 0048	จงพิสูจน์ว่า $\lim_{s \rightarrow a} \frac{s^4 - a^4}{s^2 - a^2} = 2a^2$
ข้อที่ 0049	ให้ $F(x) = ax^2 + bx + c$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 2ax + b$
ข้อที่ 0050	กำหนดให้ $F(x) = \frac{1}{x}$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}$
ข้อที่ 0051	กำหนดให้ $F(x) = x^3$ จงหาค่า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x)}{h}$
ข้อที่ 0052	จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 5}{2x + 3} = 2$
ข้อที่ 0053	จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4y^2 - 3}{2y^3 + 3y^2} = 0$
ข้อที่ 0054	จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^4 + bx^2 + c}{dx^5 + ex^3 + fx} = 0$