

ครอบคลุมเนื้อหาส่วนใหญ่ของกลุ่ม

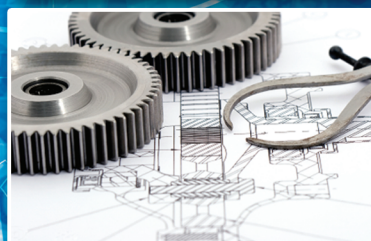
วิชาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ตามระเบียบคณะกรรมการสภาวิศวกร



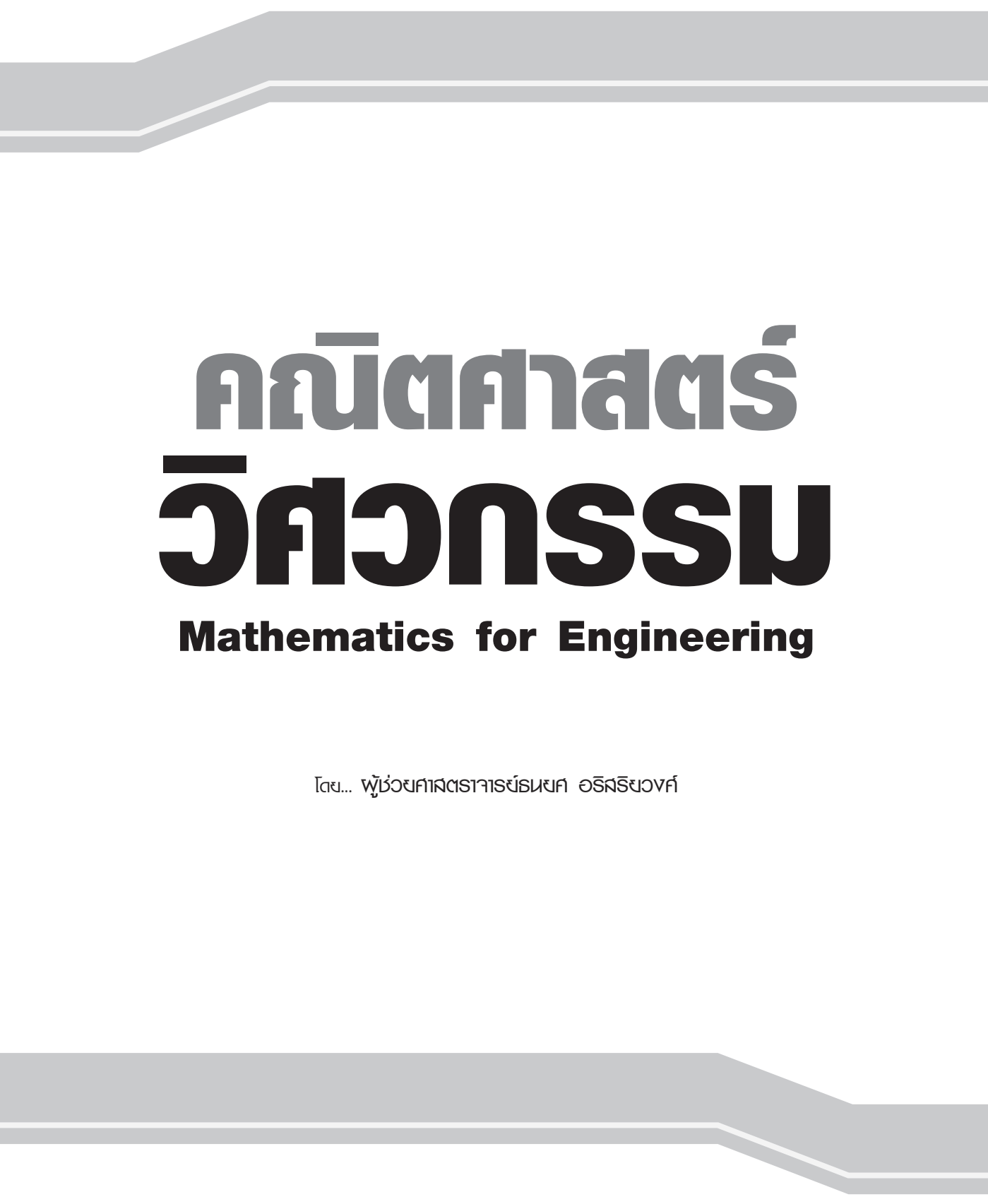
คณิตศาสตร์ วิศวกรรม

Mathematics for Engineering

- ตัวอย่างเชิงวิศวกรรมเพื่อมองเห็นภาพการประยุกต์ใช้งานได้อย่างชัดเจน



โดย... ผู้ช่วยศาสตราจารย์ธนยศ อธิริยวงศ์



คณิตศาสตร์ วิศวกรรม

Mathematics for Engineering

โดย... ผู้ช่วยศาสตราจารย์ณรงค์ อธิสริยวงศ์

คณิตศาสตร์วิศวะกรรม

พิมพ์ครั้งที่ 1 มิถุนายน 2559

S79-01-01-030-06-16

สงวนสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์

หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต

จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

ราคา **245** บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

ธนยศ อริสริยวงศ์.

คณิตศาสตร์วิศวะกรรม. -- ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2559.

256 หน้า.

1. คณิตศาสตร์วิศวะกรรม. I. ชื่อเรื่อง.

620.00151

ISBN 978-616-213-636-8

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย



บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

SKYBOOK COMPANY LIMITED

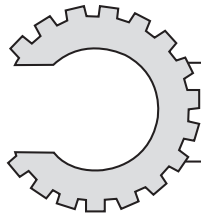
28, 30, 32 ซอยรังสิต-ปทุมธานี 16 ซอย 7

ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทรศัพท์ 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร 0-2567-5105

www.skybook.co.th e-mail : sales@skybook.co.th

หากท่านผู้อ่านพบว่าหนังสือสลับหน้า พิมพ์ไม่ชัดเจน หน้าขาดหายไม่ครบ
หรือความบกพร่องอื่นใด อันเนื่องมาจากกระบวนการพิมพ์และการเข้าเล่ม
กรุณาส่งหนังสือมาที่บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด เพื่อรับหนังสือเล่มใหม่



คำนำ

หนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมเล่มนี้ผู้เขียนมีจุดมุ่งหมายให้ใช้เป็นหนังสือประกอบการเรียนในรายวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมหรือในรายวิชาที่เกี่ยวข้องสำหรับผู้ศึกษาในสาขาวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ โดยได้เรียบเรียงให้มีเนื้อหาครอบคลุมในเรื่องที่เป็นพื้นฐานสำคัญและเรียงลำดับเนื้อหาให้มีความสอดคล้องกัน รวมทั้งได้มีการยกตัวอย่างเชิงวิศวกรรมประกอบเพื่อให้ผู้อ่านได้มองเห็นภาพการประยุกต์ใช้งานได้อย่างชัดเจน และในส่วนท้ายของหนังสือได้มีการเฉลยแบบฝึกหัดเอาไว้ด้วยเพื่อให้ผู้อ่านสามารถตรวจคำตอบของตนเองได้

เนื้อหาของหนังสือจะแบ่งออกเป็นสองส่วนใหญ่ คือ การแก้สมการเชิงอนุพันธ์และเวกเตอร์แคลคูลัส โดยส่วนที่เป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์จะอยู่ในบทที่ 1 ถึงบทที่ 4 และส่วนที่เป็นเวกเตอร์แคลคูลัสจะอยู่ในบทที่ 5 ถึงบทที่ 9 ซึ่งทั้งสองส่วนนี้เป็นพื้นฐานและมีความสำคัญอย่างยิ่งในการศึกษาทางด้านวิศวกรรมต่อไป

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะช่วยให้ผู้อ่านมีความเข้าใจในการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมหรือรายวิชาที่เกี่ยวข้องได้ดียิ่งขึ้น และถ้ามีสิ่งผิดพลาดประการใดผู้เขียนยินดีจะทำการปรับปรุงในครั้งต่อไป เพื่อให้หนังสือเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ธนยศ อริสริยวงศ์





บทที่ 1	สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น	9
1.1	กระบวนการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม	9
1.2	นิยามที่ใช้ในสมการเชิงอนุพันธ์	11
1.3	ความสัมพันธ์ระหว่างสมการเชิงอนุพันธ์กับระบบทางวิศวกรรม ...	13
	แบบฝึกหัดที่ 1.1	18
บทที่ 2	สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง	19
	แบบฝึกหัดที่ 2.1	20
2.1	การอินทิเกรตโดยตรง	21
2.2	การแยกตัวแปร	24
	แบบฝึกหัดที่ 2.2	29
2.3	สมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรง	31
	แบบฝึกหัดที่ 2.3	35
2.4	ตัวประกอบปริพันธ์	36
	แบบฝึกหัดที่ 2.4	41
2.5	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเชิงเส้น	42
	แบบฝึกหัดที่ 2.5	45
2.6	การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งในงานวิศวกรรม	46
	แบบฝึกหัดที่ 2.6	51



บทที่ 3	สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองและอันดับสูง	52
3.1	สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง	52
3.2	สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ ...	53
	แบบฝึกหัดที่ 3.1	62
3.3	สมการออยเลอร์-คูชีย์	64
	แบบฝึกหัดที่ 3.2	65
3.4	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองไม่เอกพันธ์	66
3.5	การหาผลเฉลยเฉพาะด้วยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์	68
3.6	การหาคำตอบเฉพาะด้วยวิธีการแปรผันตัวแปร	74
	แบบฝึกหัดที่ 3.3	76
3.7	การประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองในงานวิศวกรรม ...	77
	แบบฝึกหัดที่ 3.4	84
3.8	สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูง	85
	แบบฝึกหัดที่ 3.5	88
	แบบฝึกหัดที่ 3.6	92
บทที่ 4	การแปลงลาปลาซ	93
4.1	หลักการของการแปลงลาปลาซ	93
4.2	นิยามของการแปลงลาปลาซ	95
4.3	คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ	96
	แบบฝึกหัดที่ 4.1	99
4.4	ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์และอินทิกรัล	
	ในสมการเชิงอนุพันธ์	101

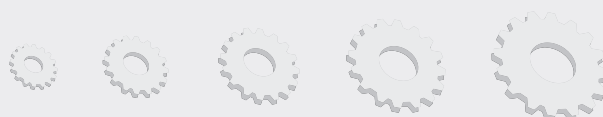


แบบฝึกหัดที่ 4.2	107
4.5 ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันชั้นและอิมพัลส์ฟังก์ชัน ...	108
แบบฝึกหัดที่ 4.3	114
4.6 อนุพันธ์และการอินทิเกรตของการแปลงลาปลาซ	115
แบบฝึกหัดที่ 4.4	118
4.7 ทฤษฎีบทผลการประสาน	119
แบบฝึกหัดที่ 4.5	121
4.8 การแยกเศษส่วนย่อย	122
แบบฝึกหัดที่ 4.6	130
4.9 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์	131
แบบฝึกหัดที่ 4.7	133

บทที่ 5 เวกเตอร์เบื้องต้น	134
5.1 ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์	134
5.2 องค์ประกอบของเวกเตอร์	135
5.3 พิกัดเวกเตอร์	136
5.4 กฎทางพิกัดของเวกเตอร์	141
5.5 เวกเตอร์หน่วย	141
5.6 เวกเตอร์หน่วยมุมฉาก	141
5.7 ระบบพิกัดฉากมือขวา	142
5.8 การเขียนเวกเตอร์ในรูปของเวกเตอร์หน่วยมุมฉาก	143
5.9 การบวกและลบเวกเตอร์ในรูปของเวกเตอร์หน่วยมุมฉาก	144
แบบฝึกหัดที่ 5.1	150



บทที่ 6	ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์	153
6.1	ผลคูณเชิงสเกลาร์	153
แบบฝึกหัดที่ 6.1		158
6.2	ผลคูณเชิงเวกเตอร์	159
6.3	คุณสมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์	160
แบบฝึกหัดที่ 6.2		165
6.4	ผลคูณของสามเวกเตอร์	166
6.5	สมการเส้นตรงในระนาบ 3 มิติ	167
6.6	สมการระนาบในสามมิติ	172
แบบฝึกหัดที่ 6.3		177
บทที่ 7	การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์	179
7.1	สนามสเกลาร์	179
7.2	สนามเวกเตอร์	179
7.3	อนุพันธ์ธรรมดาของเวกเตอร์	181
7.4	สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์	182
แบบฝึกหัดที่ 7.1		185
7.5	ความเร็วและความเร่ง	187
7.6	เส้นโค้งปริภูมิ	187
7.7	เวกเตอร์สัมผัสโค้งและความยาวโค้ง	187
7.8	อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสเกลาร์	191
แบบฝึกหัดที่ 7.2		195



7.9	อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันเวกเตอร์	197
	แบบฝึกหัดที่ 7.3	200
บทที่ 8	เกรเดียนต์ ไดเวอร์เจนซ์ และเคิร์ล	201
8.1	ตัวดำเนินการเชิงเวกเตอร์เดล.....	201
8.2	เกรเดียนต์	201
8.3	อนุพันธ์ระบุทิศทาง	203
8.4	การลู่ออก	205
8.5	เคิร์ล	206
8.6	สูตรเกี่ยวกับตัวดำเนินการเดล	207
	แบบฝึกหัดที่ 8.1	208
บทที่ 9	การอินทิเกรตเวกเตอร์	210
9.1	อินทิกรัลธรรมดาของเวกเตอร์	210
9.2	อินทิกรัลตามเส้น	211
	แบบฝึกหัดที่ 9.1	219
9.3	อินทิกรัลตามพื้นผิว	221
	แบบฝึกหัดที่ 9.2	229
9.4	ทฤษฎีของกรีนในระนาบ	230
9.5	ทฤษฎีของสโตกส์	233
	แบบฝึกหัดที่ 9.3	236
	เฉลยแบบฝึกหัด	237
	บรรณานุกรม	254





บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงความสำคัญในการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ โดยจะเริ่มจากกระบวนการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม เพื่อให้ผู้อ่านทราบถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมการเชิงอนุพันธ์และการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม รวมทั้งนิยามต่าง ๆ ที่ใช้ในสมการเชิงอนุพันธ์ พร้อมตัวอย่างประกอบ

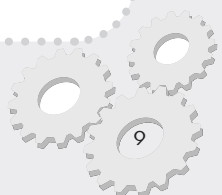
1.1

กระบวนการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม

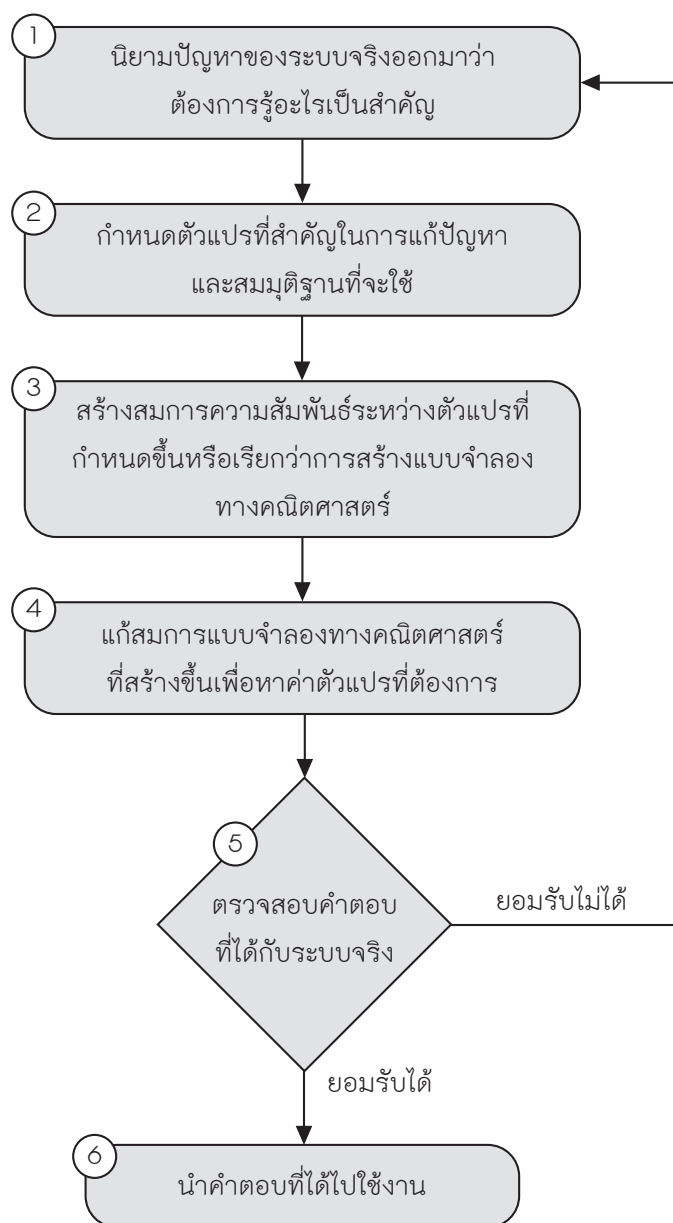
ในการทำงานของวิศวกรนั้นมักจะพบกับคำถามต่าง ๆ มากมาย เช่น เราจะทราบได้อย่างไรว่าตึกสูงที่สร้างขึ้นจะมีการเอียงตัวมาน้อยเพียงใดเมื่อมีลมมาปะทะ ต้องใช้เวลานานเท่าใดจนกว่าน้ำที่เก็บไว้ในถังจะหมด หรือเมื่อเราป้อนกระแสไฟฟ้าให้กับมอเตอร์แล้วมอเตอร์จะให้แรงบิดออกมาเท่าใด เป็นต้น เพื่อที่จะตอบปัญหาดังกล่าว วิศวกรจะต้องมีกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นระบบ ดังรูปที่ 1.1

จากรูปที่ 1.1 กระบวนการจะเริ่มจากการนิยามปัญหาจากระบบจริง กำหนดตัวแปรต่าง ๆ ให้กับระบบและตั้งสมมุติฐานที่จะใช้ ขั้นตอนต่อไปก็ทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบดังกล่าว และแก้สมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นเพื่อหาค่าตัวแปรที่ต้องการทราบค่า ถึงขั้นตอนนี้เราจะทราบว่าตัวแปรที่ต้องการมีค่าเท่าใด จากนั้นทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการแก้สมการกับค่าที่วัดได้จากระบบจริงว่าแตกต่างกันมาน้อยเพียงใด อยู่ในช่วงที่ยอมรับได้หรือไม่ ถ้าอยู่ในช่วงที่ยอมรับไม่ได้ก็ต้องย้อนกลับไปทำขั้นตอนแรกใหม่ แต่ถ้าค่าที่คำนวณมาได้อยู่ในช่วงยอมรับได้ก็นำค่านั้นไปใช้งานได้ทันที

จากกระบวนการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมเราจะพบว่าขั้นตอนที่สาม ตามรูปที่ 1.1 ซึ่งก็คือขั้นตอนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยปกติแล้วสมการที่ได้จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นส่วนมาก ซึ่งจะแสดงให้เห็นในหัวข้อที่ 1.3



ถึงตรงนี้ผู้อ่านคงจะพอมองเห็นภาพรวมของความสัมพันธ์ระหว่างสมการเชิงอนุพันธ์และกระบวนการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม ในหัวข้อต่อไปจะเป็นการกล่าวถึงนิยามต่าง ๆ ที่ใช้ในสมการเชิงอนุพันธ์



รูปที่ 1.1 กระบวนการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม

1.2

นิยามที่ใช้ในสมการเชิงอนุพันธ์

1.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) หมายถึง สมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งภายในสมการจะประกอบไปด้วยอนุพันธ์ของตัวแปร

1.2.2 อันดับ (Order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ

1.2.3 ความเป็นเชิงเส้นสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ในตัวแปรตาม y และตัวแปรอิสระ x จะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear Differential Equation) ถ้าสามารถจัดอยู่ในรูปร่างต่อไปนี้

$$b_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_1(x) \frac{dy}{dx} + b_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

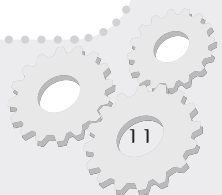
โดยที่ฟังก์ชัน $b_j(x)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น ส่วนสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการที่ (1) จะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Differential Equation)

ตัวอย่างที่ 1.1 จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y - 5x \frac{dy}{dx} = e^x + 1$ จงพิจารณาอันดับและความเป็นเชิงเส้น

วิธีทำ จากสมการที่ให้มาจะพบว่าสมการนี้มีอันดับหนึ่ง เพราะอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการนี้คือ $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ มีค่าเป็นหนึ่ง และสมการนี้เป็นสมการเชิงเส้น เนื่องจากสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการที่ (1) ได้ โดย $b_1(x) = -5x$, $b_0(x) = 1$ และ $g(x) = e^x + 1$

ตัวอย่างที่ 1.2 จากสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2 y}{dx^2} - 5x^2 \frac{dy}{dx} = e^x + 1$ จงพิจารณาอันดับและความเป็นเชิงเส้น

วิธีทำ จากสมการที่ให้มาจะพบว่าสมการนี้มีอันดับสอง เพราะอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการนี้คือ $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$ มีค่าเป็นสอง และสมการนี้เป็นสมการเชิงเส้น เนื่องจากสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการที่ (1) ได้ โดย $b_2(x) = 1$, $b_1(x) = -5x^2$, $b_0(x) = 0$ และ $g(x) = e^x + 1$



ตัวอย่างที่ 1.3 จากสมการเชิงอนุพันธ์ $5t \frac{d^4y}{dt^4} + 3t^2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 - (\sin t)y^6 = 0$

จงพิจารณาอันดับและความเป็นเชิงเส้น

วิธีทำ จากสมการที่ให้มาจะพบว่าสมการนี้มีอันดับสี่ เพราะอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการนี้คือ $\left(\frac{d^4y}{dt^4}\right)$ มีค่าเป็นสี่ และสมการนี้เป็นสมการไม่เป็นเชิงเส้น เนื่องจากไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการที่ (1) ได้ เพราะมีอนุพันธ์ของ y บางอันดับ และ y เอง ยกกำลังที่ไม่ใช่หนึ่ง

ตัวอย่างที่ 1.4 จากสมการเชิงอนุพันธ์ $3t^2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 - (\sin t) \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^6 = 0$

จงพิจารณาอันดับและความเป็นเชิงเส้น

วิธีทำ จากสมการที่ให้มาจะพบว่าสมการนี้มีอันดับสอง เพราะอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการนี้คือ $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ มีค่าเป็นสอง และสมการนี้เป็นสมการไม่เป็นเชิงเส้น เนื่องจากไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการที่ (1) ได้ เพราะมีอนุพันธ์ของ y ยกกำลังที่ไม่ใช่หนึ่ง

ตัวอย่างที่ 1.5 จากสมการเชิงอนุพันธ์ $t^2 \frac{d^2s}{dt^2} - t \frac{ds}{dt} = 1 - \sin t$ จงพิจารณาอันดับ

และความเป็นเชิงเส้น

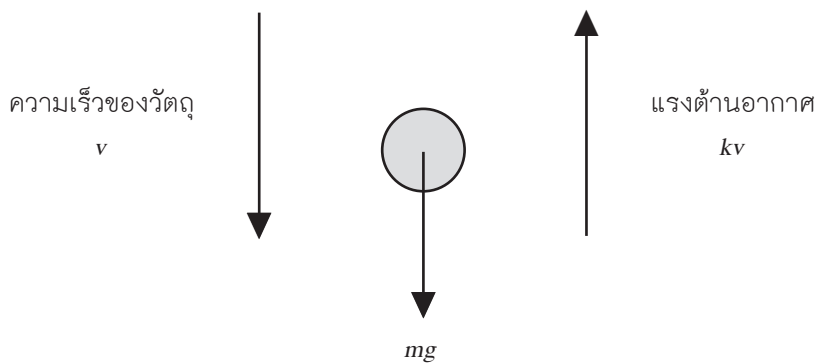
วิธีทำ จากสมการที่ให้มาจะพบว่าสมการนี้มีอันดับสอง เพราะอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการนี้คือ $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ มีค่าเป็นสอง และสมการนี้เป็นสมการเชิงเส้น เนื่องจากสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการที่ (1) ได้ โดย $b_2(x) = t^2$, $b_1(x) = -t$, $b_0(x) = 0$ และ $g(x) = 1 - \sin t$

1.3

ความสัมพันธ์ระหว่างสมการเชิงอนุพันธ์กับระบบทางวิศวกรรม

จากตัวอย่างในหัวข้อ 1.2 ผู้อ่านคงจะพอเข้าใจถึงนิยามต่าง ๆ ที่ใช้ในสมการเชิงอนุพันธ์ได้เป็นอย่างดี แต่ตัวอย่างที่ยกมาแสดงนั้นเป็นการแสดงตัวอย่างในเชิงวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ ยังไม่ได้แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมการเชิงอนุพันธ์กับระบบทางกายภาพในงานวิศวกรรม ดังนั้นเพื่อให้ความสัมพันธ์นี้ชัดเจนยิ่งขึ้นจึงจะยกตัวอย่างทางวิศวกรรมประกอบดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.6 พิจารณาวัตถุมวล m ซึ่งกำลังตกลงสู่พื้น ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 แรงต่าง ๆ ที่กระทำกับวัตถุขณะตกลงสู่พื้น

จากรูปที่ 1.2 แสดงถึงแรงต่าง ๆ ที่กระทำกับวัตถุ ซึ่งประกอบไปด้วยแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก $F_g = mg$ แรงเนื่องจากแรงต้านอากาศซึ่งแปรผันตรงกับความเร็วของวัตถุ (v) มีค่าเท่ากับ $F_r = kv$ โดย k เป็นค่าคงที่ จากกฎข้อที่สองของนิวตันจะสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุได้ดังนี้

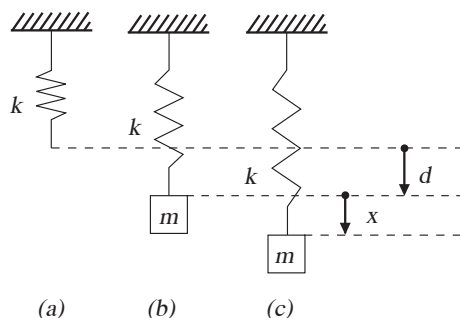
$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

หรือ

$$m \frac{dv}{dt} + kv = mg \quad (1.6.1)$$

จากสมการที่ (1.6.1) จะพบว่าสมการการเคลื่อนที่ของมวล m ก็คือ สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งนั่นเอง

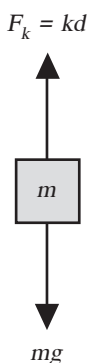
ตัวอย่างที่ 1.7 พิจารณาระบบที่ประกอบไปด้วยมวลและสปริง ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 ระบบมวลและสปริง

จากรูปที่ 1.3 (a) แสดงถึงการนำสปริงมาแขวนไว้ที่เพดานโดยสปริงมีค่าคงที่เท่ากับ k จากนั้นเมื่อนำมวล m มาแขวนไว้กับสปริงตามรูปที่ 1.3 (b) สปริงก็จะยืดตัวออกเป็นระยะทางเท่ากับ d ณ จุดนี้ถือเป็นจุดสมดุลระหว่างแรงของสปริงที่กระทำกับมวล m และแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ทำให้มวล m หยุดนิ่ง รูปที่ 1.3 (c) แสดงถึงมวล m ขณะกำลังเคลื่อนที่ ถ้ากำหนดให้ขณะกำลังพิจารณามวล m เคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะทางเท่ากับ x สมการการเคลื่อนที่ของมวล m สามารถหาได้ดังนี้

พิจารณาแรงที่กระทำกับมวล m ตามรูปที่ 1.3 (b) จะได้ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 แรงที่กระทำกับมวล m ณ จุดสมดุล

จากกฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน สมดุลของแรงจะได้ว่า

$$\Sigma F = 0$$

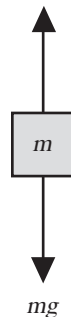
$$mg - F_k = 0$$

$$mg - kd = 0$$

$$mg = kd \quad (1.7.1)$$

พิจารณาแรงที่กระทำกับมวล m ขณะเคลื่อนที่ ตามรูปที่ 1.3 (c) จะได้
ดังรูปที่ 1.5

$$F_k = k(x + d)$$



รูปที่ 1.5 แรงที่กระทำกับมวล m ขณะเคลื่อนที่

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้ว่า

$$\Sigma F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$mg - F_k = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

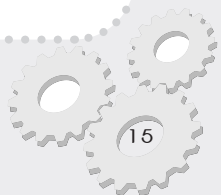
$$mg - k(x + d) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$mg - kx - kd = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

จากสมการที่ (1.7.1) จะได้ว่า

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

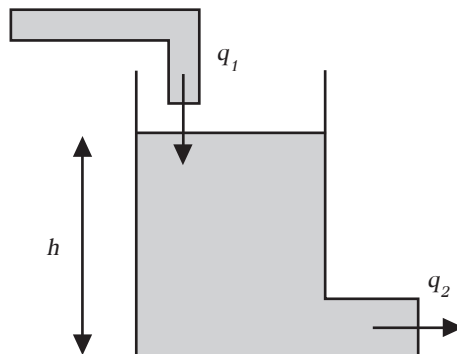
หรือ



$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1.7.2)$$

จากสมการที่ (1.7.2) ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่ของระบบที่ประกอบไปด้วยมวลและสปริง ก็คือสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 1.8 พิจารณาดังน้ำที่มีน้ำเข้าและน้ำออกจากถัง ดังรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.6 ระบบการไหลของน้ำเข้าและน้ำออกในถัง

จากรูปที่ 1.6 ถ้ากำหนดให้อัตราการไหลของน้ำเข้าถังมีค่าเป็น q_1 อัตราการไหลของน้ำออกจากถังเป็น q_2 และความลึกของระดับน้ำในถังเป็น h อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรน้ำ V เมื่อเทียบกับเวลา t สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{dV}{dt} = q_1 - q_2$$

แต่ในที่นี้ $V = Ah$ โดย A คือ พื้นที่หน้าตัดของถังน้ำ

$$\frac{d(Ah)}{dt} = q_1 - q_2$$

$$A \frac{dh}{dt} = q_1 - q_2$$

และจากทฤษฎีของ Torricelli จะได้ว่า

$$q_2 = \sqrt{2gh}$$

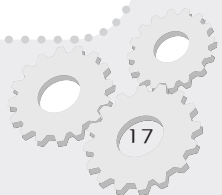
ดังนั้นจะได้ว่า

$$A \frac{dh}{dt} + \sqrt{2gh} = q_1 \quad (1.8.1)$$

จากสมการที่ (1.8.1) ซึ่งเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความลึกของระดับน้ำ h กับเวลา t ก็คือ สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งนั่นเอง

จากตัวอย่างทางวิศวกรรมข้างต้น ผู้อ่านจะพบว่าสุดท้ายแล้วสมการที่ออกมาจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสี่อันดับที่ได้กล่าวไว้ในตอนท้ายของหัวข้อ 1.1 ซึ่งในโลกของความเป็นจริง ระบบทางวิศวกรรมเกือบทุกระบบก็สามารถเขียนออกมาเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้เกือบทั้งหมด

ถึงขณะนี้ผู้อ่านคงจะเล็งเห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างระบบทางวิศวกรรมและสมการเชิงอนุพันธ์ได้อย่างชัดเจนแล้ว ในบทต่อไปจะเป็นการกล่าวถึงวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง



แบบฝึกหัดที่ 1.1

1. จงพิจารณาอันดับและความเป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

1.1 $y - 5x \frac{dy}{dx} = e^x + 1$

1.2 $y - 5x \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 = e^x + 1$

1.3 $\left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right) - 5x \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 = e^x + 1$

1.4 $5x \frac{d^4 y}{dx^4} + 3x^2 \frac{dy}{dx} - (\sin x)y = 0$

1.5 $3t^2 \frac{d^3 y}{dx^3} - (\sin t) \frac{d^2 y}{dx^2} - (\cos t)y = 0$

1.6 $5 \frac{dy}{dx} - 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^7 y = t$

1.7 $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) - 3y \left(\frac{dy}{dx} \right) + xy = 0$

2. อนุภาคมวล m เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงตามแนวนอน แรงที่กระทำกับอนุภาคประกอบไปด้วยแรงที่เป็นสัดส่วนกับระยะทางซึ่งมีทิศทางตามการเคลื่อนที่ของมวล และแรงต้านการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นสัดส่วนกับความเร็วของอนุภาค จงหาสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการเคลื่อนที่ของอนุภาค

3. มวล 10 กิโลกรัม ผูกติดกับสปริง ทำให้สปริงยืดออก 0.7 เมตร จากตำแหน่งเริ่มต้น มวลเริ่มต้นการเคลื่อนที่จากตำแหน่งสมดุลด้วยความเร็วต้น 1 เมตร/วินาที ในทิศทางขึ้น จงหาสมการการเคลื่อนที่ของมวล ถ้าแรงต้านอากาศเป็น $-90 \frac{dy}{dt}$ นิวตัน

4. มวล 128 กิโลกรัม ผูกติดกับสปริง ซึ่งสปริงมีค่าคงที่เป็น 64 นิวตัน/เมตร มวลเริ่มต้นเคลื่อนที่ในตำแหน่ง 6 เมตร เหนือตำแหน่งสมดุล และมีแรงภายนอกกระทำ $F(t) = 8 \sin 4t$ กระทำต่อมวล จงหาสมการการเคลื่อนที่ของมวล