



เตรียมสอบเข้ม

มั่นใจเต็ม



คณิตศาสตร์

คัดเลือก

วิทยาศาสตร์โอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ

(IJSO)

เหมาะ
สำหรับ
ม.1-2-3

พิชิตใจเกี่ยวกับการสอบคณิตศาสตร์ที่ “ยากที่สุด” ในระดับ ม.ต้น
ฝึกฝนกับแนวข้อสอบที่ใช้คัดเลือกตัวแทนประเทศไทยในการแข่งขันคณิตศาสตร์ในระดับนานาชาติ



มีเพียง “ความรู้” เท่านั้นที่มนุษย์ใช้พลิก “โลก” และเปลี่ยน “ชีวิต”
เราจึงสร้างสรรค์ และส่งมอบ “ความรู้” ในรูปแบบที่ดีกว่า
เพื่อให้คนไทย “เรียนรู้” ได้ตลอดชีวิต



เตรียมสอบเข้ม คณิตศาสตร์

คัดเลือกวิทยาศาสตร์โอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ (IJSO) มั่นใจเต็ม 100



AUTHOR กรกชัย แดงน้อย

EDITORIAL ชิวิน ปิ่นมุข
chewin_p@idcpremier.com

GRAPHIC DESIGNERS ยุทธนา เกิดประดิษฐ์, อนงค์นาฏ รัตนะ

PAGE LAYOUT สิริลักษณ์ วาระเลิศ

PROOFREADER พรพรรณรัตน์ ชูราณี

PUBLISHING COORDINATORS วรพล ณธิกุล, สุพัตรา อาจปรุ, พิพัฒน์ อ้อสถิตย



ข้อมูลทางบรรณานุกรม

กรกชัย แดงน้อย

เตรียมสอบเข้ม คณิตศาสตร์

คัดเลือกวิทยาศาสตร์โอลิมปิกวิชาการ

ระหว่างประเทศ (IJSO) มั่นใจเต็ม 100

นนทบุรี : ไอดีซี+, 2563

268 หน้า

1. คณิตศาสตร์

I ชื่อเรื่อง

510

ISBN 885-916-100-796-8

พิมพ์ครั้งที่ 1 กันยายน 2563

PUBLISHED AND DISTRIBUTED BY

IDC
PREMIER

บริษัท ไอดีซี พรีเมียร์ จำกัด

200 หมู่ 4 ชั้น 19 ห้อง 1901

อาคารจัสมินอินเตอร์เนชั่นแนลทาวเวอร์

ถ.แจ้งวัฒนะ อ.ปากเกร็ด จ.นนทบุรี 11120

โทรศัพท์ 0-2962-1081 (อัตโนมัติ 10 คู่สาย)

โทรสาร 0-2962-1084

เครื่องหมายการค้าอื่นๆ ที่อ้างถึงเป็นของบริษัทนั้นๆ

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537 โดยบริษัท ไอดีซีพรีเมียร์ จำกัด ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้ ไม่ว่าในรูปแบบใดๆ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากผู้จัดพิมพ์เท่านั้น

บริษัท ไอดีซี พรีเมียร์ จำกัด จัดตั้งขึ้นเพื่อเผยแพร่ความรู้ที่มีคุณภาพสู่ผู้อ่านชาวไทย เรายินดีรับงานเขียนของนักวิชาการและนักเขียนทุกท่าน ท่านผู้สนใจกรุณาติดต่อผ่านทางอีเมลที่ infopress@idcpremier.com หรือทางโทรศัพท์หมายเลข 0-2962-1081 (อัตโนมัติ 10 คู่สาย) โทรสาร 0-2962-1084

สมาชิกสัมพันธ์

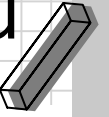
โทรศัพท์ 0-2962-1081-3 ต่อ 121 โทรสาร 0-2962-1084

ร้านค้าและตัวแทนจำหน่าย

โทรศัพท์ 0-2962-1081-3 ต่อ 112-114 โทรสาร 0-2962-1084

ราคา 250 บาท

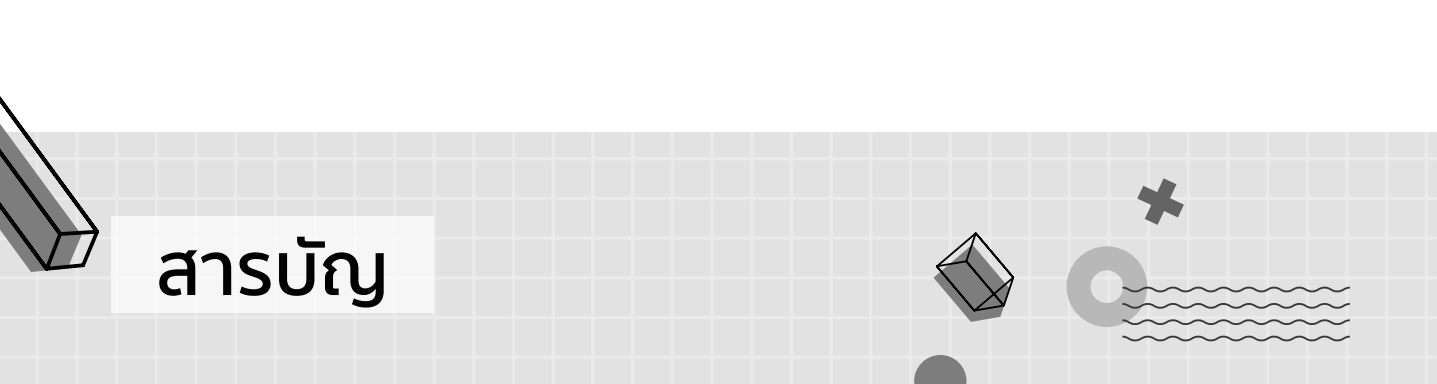
คำนำนักเรียน



หนังสือเล่มนี้เป็นการรวบรวมแนวข้อสอบเก่าสำหรับ IJSO ส่วนวิชาคณิตศาสตร์ 10 ปีย้อนหลัง เพื่อคัดเลือกนักเรียนเป็นผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันวิทยาศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ โดยโจทย์แต่ละข้อจะประเมินถึงการแสดงแนวคิดทางทฤษฎี และการประยุกต์ทักษะความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี ทำให้นักเรียนได้พัฒนาความรู้ และต่อยอดกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้นต่อไป และในบางข้อ ผู้เขียนจำเป็นต้องสอดแทรกเนื้อหานอกหลักสูตร ซึ่งต้องนำไปใช้ในการสอบเพื่อลดทอนระยะเวลาในการทำโจทย์ให้สั้นลง โดยทำให้นักเรียนได้รับเคล็ดลับในการทำ โจทย์ดังกล่าวเพิ่มขึ้นไปอีกส่วนหนึ่ง

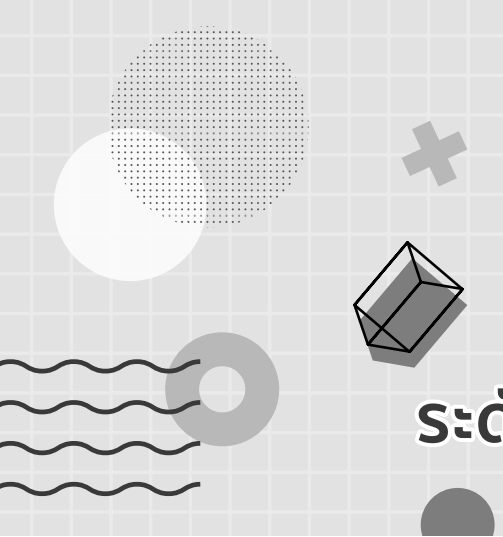
สุดท้ายนี้ ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อนักเรียนในการเพิ่มความรู้อย่างมีประสิทธิภาพ และเตรียมสอบแข่งขันในสนามต่างๆ และสอบเข้า ม.4

กรกชัช แดงน้อย



สารบัญ

การแข่งขันวิทยาศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (IJSO)	1
ทฤษฎีบทที่ควรรู้ในการสอบ IJSO คณิตศาสตร์	5
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 1	9
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 1	13
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 2	33
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 2	37
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 3	59
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 3	63
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 4	89
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 4	93
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 5	115
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 5	120
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 6	141
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 6	146
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 7	167
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 7	172
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 8	193
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 8	198
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 9	217
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 9	222
แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์) ชุดที่ 10	239
เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 10	244



การแข่งขันวิทยาศาสตร์ โอลิมปิกระหว่างประเทศ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (IJSO)

IJSO (International Junior Science Olympiad) หรือการแข่งขันวิทยาศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (อายุไม่เกิน 15 ปี) เป็นการสอบแข่งขันในวิชาวิทยาศาสตร์โดยใช้ความรู้ใน 3 วิชาหลัก (ฟิสิกส์, เคมี และชีววิทยา) ในระดับนานาชาติ ซึ่งในแต่ละประเทศจะมีการกำหนดผู้แทนประเทศในการแข่งขันแต่ละครั้งได้ 6 คน โดยผู้ที่สนใจสมัครจะต้องมีคุณสมบัติในการสมัครดังนี้

คุณสมบัติในการสมัครสอบคัดเลือก

1. กำลังศึกษาอยู่ในระดับ ม.1-ม.3 ณ วันที่รับสมัคร (อายุไม่เกิน 15 ปี ภายในปีนั้น ๆ)
2. มีคะแนนเฉลี่ยในกลุ่มรายวิชาพื้นฐานกลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ไม่ต่ำกว่า 3.50 หรือมีผลงานทางวิทยาศาสตร์ดีเด่น (ในกรณีที่คะแนนเฉลี่ยต่ำกว่า 3.50) โดยจะต้องได้รับการรับรองจากสถานศึกษา
3. มีสัญชาติไทย
4. ต้องได้รับความยินยอมจากผู้ปกครองในการเข้าค่ายอบรม โดยจะต้องมีเวลาอบรมไม่ต่ำกว่า 80% ของแต่ละวิชา
5. สำหรับนักเรียนหลักสูตรโฮมสคูล ต้องได้รับการรับรองจากสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษา
6. สำหรับนักเรียนโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย, โรงเรียนสาธิต มศว ปทุมวัน และโรงเรียนแสงทองวิทยา การสอบคัดเลือกรอบ 1 และรอบ 2 ให้อยู่ในการดำเนินงานของโรงเรียน เพื่อคัดเลือกผู้แทนนักเรียนจำนวนโรงเรียนละ 6 คน เข้าร่วมการอบรมในค่ายของมูลนิธิ สอวน.
7. ต้องไม่เคยเป็นผู้แทน IJSO มาก่อน

สำหรับการรับสมัคร และรายละเอียดการสมัครต่าง ๆ สามารถติดตามได้จากเว็บไซต์ของมูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการ และพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)



หน้าแรก เกี่ยวกับมูลนิธิ ข่าวสาร กิจกรรม คลังข้อสอบ ทำเนียบรุ่น YouTube




ข่าวประชาสัมพันธ์ถึงพระมหากษัตริย์คุณ

๖ พฤษภาคม ๒๕๖๓ วันคล้ายวันพระราชสมภพ
สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์
องค์ผู้ก่อตั้งมูลนิธิ สอวน.



The Promotion of Academic Olympiad and Development of Science Education Foundation under the patronage of Her Royal Highness Princess Galyani Vadhana Krom Luang Naradhiwas Rajanagarindra

มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการ และพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)

สมเด็จพระกนิษฐาธิราชเจ้า กรมสมเด็จพระเทพรัตนราชสุดาฯ สยามบรมราชกุมารี ทรงเป็นประธาน



เว็บไซต์ของมูลนิธิ สอวน. (<https://www.posn.or.th>)

ลักษณะการสอบคัดเลือก

การสอบคัดเลือกเพื่อเป็นตัวแทนประเทศไทยในการแข่งขัน IJSO นั้น มีอยู่ 3 รอบ ได้แก่

การสอบคัดเลือกรอบที่ 1 : สอบวิชาคณิตศาสตร์, ฟิสิกส์, เคมี และชีววิทยา วิชาละ 1 ชั่วโมง 30 นาที
คัดเลือกจากผู้สมัครสอบทั่วประเทศ (รวมโควตาต่างๆ) จำนวน 300 คน (ไม่รวมนักเรียนจากโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย, โรงเรียนสาธิต มศว ปทุมวัน และโรงเรียนแสงทองวิทยา)

การสอบคัดเลือกรอบที่ 2 : สอบวิชาฟิสิกส์, เคมี และชีววิทยา วิชาละ 1 ชั่วโมง 30 นาที

คัดเลือกจาก 300 คน มาประมาณ 30 คน เพื่อเข้าอบรมในการเตรียมสอบรอบผู้แทนประเทศไทยต่อไป (ไม่รวมนักเรียนจากโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย, โรงเรียนสาธิต มศว ปทุมวัน และโรงเรียนแสงทองวิทยา)

การสอบรอบผู้แทนประเทศไทย

ต้องผ่านการอบรมในแต่ละวิชาเกิน 80% โดยจะมีการคัดเลือกเป็นผู้แทนจริง 6 คน และสำรองอีก 4 คน



เนื้อหาที่ใช้ในการสอบรอบที่ 1 IJSO (คณิตศาสตร์)

เนื้อหาในการสอบคัดเลือกรอบที่ 1 IJSO (คณิตศาสตร์) จะแบ่งเป็น 5 ส่วนใหญ่ๆ ได้ดังนี้

1. กลุ่มจำนวน และตัวเลข ได้แก่

- จำนวนเต็ม และสมบัติของจำนวนเต็ม
- เศษส่วน และทศนิยม
- อัตราส่วน, สัดส่วน และร้อยละ
- เลขยกกำลัง (เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม และจำนวนตรรกยะ)

2. กลุ่มพีชคณิต

- สมการ และอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
- การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
- คู่อันดับและกราฟ
- ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
- สมการกำลังสอง
- กราฟของสมการกำลังสอง

3. กลุ่มเรขาคณิต

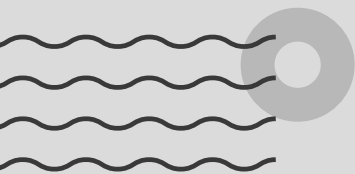
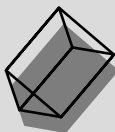
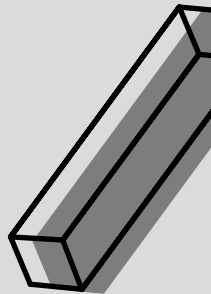
- รูปเรขาคณิต และการให้เหตุผล
- ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม, เส้นขนาน และความคล้าย
- รูปสี่เหลี่ยม และรูปหลายเหลี่ยม
- ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ
- วงกลม

4. กลุ่มการวัด

- พื้นที่
- ปริมาตรของปริซึม, ทรงกระบอก, พีระมิด, กรวย และทรงกลม
- พื้นที่ผิวของปริซึม และทรงกระบอก

5. กลุ่มตรีโกณมิติ

- รูปสามเหลี่ยมคล้าย และอัตราส่วนตรีโกณมิติ
- เอกลักษณะตรีโกณมิติ
- การประยุกต์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

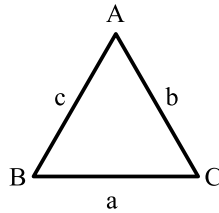


ทฤษฎีบทที่ควรรู้ ในการสอบ IJSO คณิตศาสตร์

เนื่องจากข้อสอบคัดเลือก IJSO คณิตศาสตร์มีลักษณะที่ค่อนข้างซับซ้อนมาก ทำให้การสอบภายในช่วงเวลา 1 ชั่วโมงครึ่ง อาจไม่เพียงพอต่อการทำโจทย์ได้ทั้งหมด ดังนั้น นักเรียนที่กำลังเตรียมตัวสอบ IJSO จึงควรรู้ทฤษฎีบทที่มักช่วยลัดขั้นตอนในการทำโจทย์ และจะถูกใช้ในหนังสือเล่มนี้ด้วย ได้แก่

1. การหาพื้นที่สามเหลี่ยมแบบใช้ตรีโกณมิติมาช่วยหา “ความสูง”

จากรูปพื้นที่สามเหลี่ยม ABC จะหาได้จาก



$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณด้านประกอบมุม } \theta \times \sin \theta$$

$$\text{นั่นคือ พื้นที่สามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} \times (a \times b) \times \sin C = \frac{1}{2} \times (a \times c) \times \sin B = \frac{1}{2} \times (b \times c) \times \sin A$$

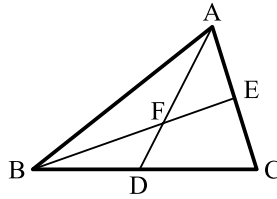
2. การคิดค่า sin ของมุมที่เกิน 90°

ในบางกรณี การหาพื้นที่สามเหลี่ยมของโจทย์ก็มีความจำเป็นที่ต้องใช้มุมมากกว่า 90 องศา ซึ่งโดยคุณสมบัติของตรีโกณมิติแล้ว จะพบว่าหากมุม $\theta > 90^\circ$ แล้ว

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

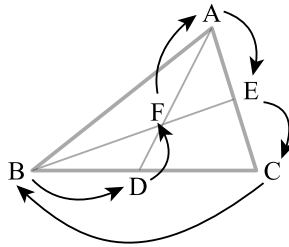
3. ทฤษฎีบทเซวา (Ceva's Theorem)

สำหรับสามเหลี่ยมที่มีเส้นตรงตัดกันภายในแล้ว จะได้ว่า



ผลคูณของอัตราส่วนความยาวบนเส้นตรงเดียวกัน = 1

โดยมีเทคนิคการเรียงอัตราส่วนความยาวคือ “เริ่มจากจุดใด ให้จบที่จุดนั้น” เช่น เริ่มที่จุด A ก็ต้องจบที่จุด A และ *ในแต่ละด้านของสามเหลี่ยมให้เคลื่อนที่สองครั้งเพื่อเกิดอัตราส่วน* เช่นดังรูป

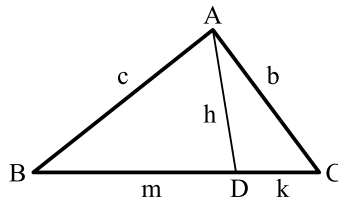


และจากรูปก็สามารถเขียนเป็นสมการตามทฤษฎีบทเซวาได้ว่า

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$$

4. ทฤษฎีบทของสจ๊วต (Stewart's Theorem)

สำหรับสามเหลี่ยมที่มีเส้นตรงหนึ่งเส้นอยู่ภายในสามเหลี่ยม



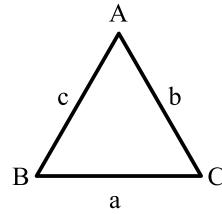
จากรูป สามเหลี่ยม ABC มีเส้นตรง AD ลากอยู่ภายใน ทำให้ด้าน BC ถูกแบ่งออกเป็น m, k แล้ว

$$b^2m + c^2k = (m+k)(mk + h^2)$$



5. กฎของไซน์ (Sine Law)

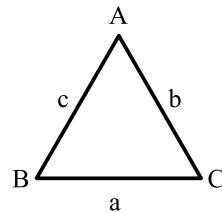
สำหรับสามเหลี่ยมที่โจทย์ให้ด้าน 2 ด้าน หรือมุม 2 มุม (ขึ้นอยู่กับโจทย์ว่าจะให้หาด้าน หรือหามุม)



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

6. กฎของโคไซน์ (Cosine Law)

สำหรับสามเหลี่ยมที่โจทย์ให้ด้านของสามเหลี่ยม 3 ด้าน หรือมุม 1 มุม (ขึ้นอยู่กับโจทย์ว่าจะให้หาด้าน หรือหามุม)



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

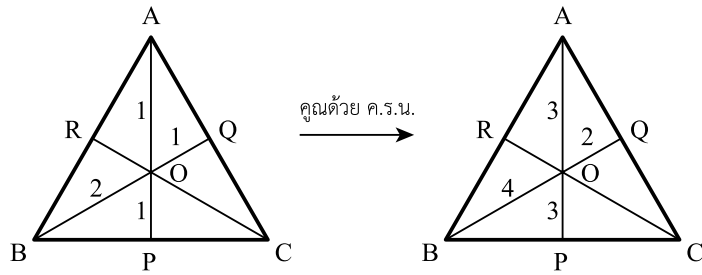
7. การหาความยาวของเส้นตัดภายในสามเหลี่ยมด้วยวิธี mass point

วิธี mass point เป็นวิธีการหนึ่งในการหาความยาวของเส้นตัดภายในสามเหลี่ยม ซึ่งมีหลักการที่ว่า

“เส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางสามเหลี่ยม จะมีผลรวมของเลขที่เท่ากัน”

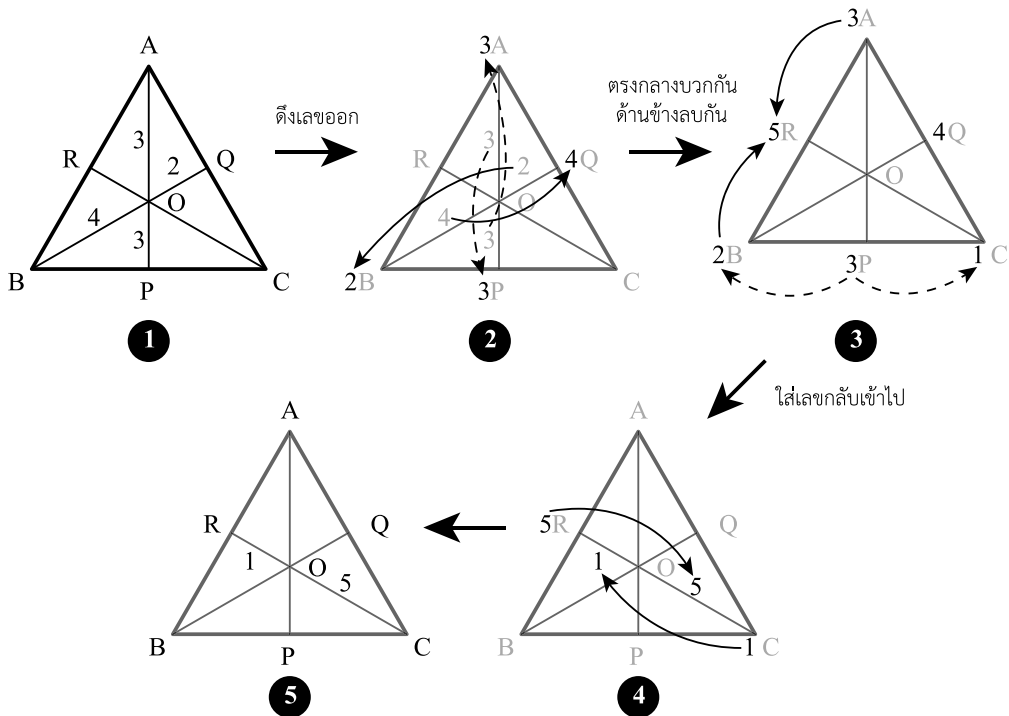
เช่น กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC มีลักษณะดังรูปซ้าย ถ้าหากเราต้องการหาความยาวของเส้น CO เราจะสามารถหาได้จากเงื่อนไขที่ว่า

เนื่องจากเส้น AP ผลรวมได้ 2 และเส้น BQ ผลรวมได้ 3 ดังนั้น จากภาพแรกเราใช้วิธี ค.ร.น. ซึ่งมีค่าเท่ากับ 6 โดยเส้นของ AP จะต้องคูณอีก 3 และเส้น BQ จะต้องคูณอีก 2 จะได้ดังภาพ



เมื่อหา ค.ร.น. แล้ว เราจะหาความยาวของ OR และ CO ได้ดังนี้

1. นำเลขของแต่ละด้านภายในรูปสามเหลี่ยมออกดังรูปที่ 2
2. จุดที่อยู่ระหว่างด้าน (จุด P, Q, R) จะเป็นจุดที่เป็น “ผลรวม” ของเลขของจุดที่อยู่ปลายด้าน (จุด A, B, C) ตามรูปที่ 3
3. เมื่อได้ค่าที่จุดต่างๆ แล้วเราจะนำค่าใส่กลับไป ดังรูปที่ 4
4. เราจะได้ขนาดของด้าน OR และ CO ตามรูปที่ 5



ทำให้เราได้ว่า ความยาวของเส้นตรง $OC = 5$

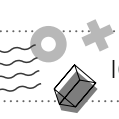


.....

แนวข้อสอบคัดเลือก IJSO (คณิตศาสตร์)

.....

ชุดที่ 1



1. จงหาค่าของ $\frac{8}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

1. $\sqrt{2}+\sqrt{6}+2$ 2. $\sqrt{2}+\sqrt{6}-2$ 3. $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+4$ 4. $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}-4$

2. จงหาค่าของ $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{2}{4}}} + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{2}{4}}}$

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

3. จงหาค่าของ $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$

1. $-\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{2}$ 3. $-\sqrt{7}$ 4. $\sqrt{7}$

4. จงหาค่าของ $2 + \left(5^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{\frac{1}{2}} \left(5^{\frac{1}{2}} + 2\right)^{\frac{1}{2}}$

1. $\sqrt{2}$ 2. 2 3. $\sqrt{5}$ 4. 5

5. ให้ $A = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^3$ และ $B = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^3$ ถ้า $A + B = 6$ แล้ว $A - B$ มีค่าเท่าไร

1. $2\sqrt{3}$ 2. $3\sqrt{2}$ 3. $4\sqrt{2}$ 4. $2\sqrt{10}$

6. ถ้า $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$ และ $B = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$ แล้ว $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199}$ มีค่าเท่าไร

1. $A - \frac{B}{2}$ 2. $A + \frac{B}{2}$ 3. $\frac{A}{2} - B$ 4. $\frac{A}{2} + B$

7. จงหาค่าต่ำสุดของ $(x^2 - 2x)^2 + 6x^2 - 12x + 20$

1. 10 2. 15 3. 20 4. 25

8. จิโนพายเรือตามน้ำจากบ้านไปโรงเรียนแล้วจึงพายทวนน้ำกลับบ้าน ถ้าอัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง และอัตราเร็วของกระแสน้ำมีค่าคงตัว และอัตราเร็วเฉลี่ยของการพายเรือไปกลับนี้เป็น 0.6 เท่าของอัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำ แล้วอัตราส่วนของอัตราเร็วการพายเรือในน้ำนิ่งต่ออัตราเร็วกระแสน้ำมีค่าเท่าไร

1. $\frac{1}{5}$ 2. $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{5}{2}$ 4. 5

9. A, B และ C แข่งวิ่งระยะ 100 เมตร ถ้า A เริ่มที่จุดตั้งต้น B อยู่ข้างหน้า A 20 เมตร และ C อยู่ข้างหน้า B 20 เมตร แล้วทั้งสามคนถึงเส้นชัยพร้อมกันหมด ถ้าให้ B เริ่มที่จุดตั้งต้น และต้องการให้ B และ C ถึงเส้นชัยพร้อมกัน C ต้องเริ่มข้างหน้า B กี่เมตร ถ้าสมมติให้ทุกคนวิ่งด้วยอัตราเร็วสม่ำเสมอ

1. 10 2. 15 3. 20 4. 25



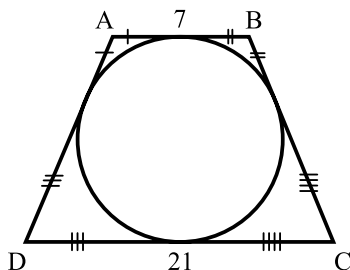
10. รถยนต์ยาว 5 เมตร วิ่งด้วยความเร็ว 65 กิโลเมตรต่อชั่วโมง สวนกับรถบรรทุกที่วิ่งมาด้วยความเร็ว 35 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้ารถทั้งสองคันใช้เวลา 0.54 วินาที จึงวิ่งผ่านกันโดยสมบูรณ์ จงหารถบรรทุกยาวกี่เมตร

1. 10 2. 12 3. 15 4. 18

11. ส่วนของเส้นตรง AB ตัดส่วนของเส้นตรง CD ที่จุด M ซึ่ง $3AM = 4MB$ และ $3CM = MD$ ถ้า AB ยาว 28 หน่วย และมุม $\hat{A}BD = \hat{A}CD$ แล้ว CM ยาวกี่หน่วย

1. 4 2. 6 3. 8 4. 10

12. วงกลมรัศมี 6 หน่วย สัมผัสด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีด้านขนานกันยาว 7 หน่วย และ 21 หน่วย แล้วกำลังสองของผลต่างของความยาวอีกสองด้านที่เหลือของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีค่าเท่าไร



1. 1 2. 4 3. 9 4. 16

13. รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ยาวด้านละ 2 หน่วย มีเส้นทแยงมุมที่สั้นที่สุดยาวกี่หน่วย

1. $\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $2\sqrt{2}$ 4. $2\sqrt{3}$

14. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มีจุด P อยู่บนด้าน AB ทำให้ $AP = 3PB$ ถ้าลากเส้นตรงจากจุด C ผ่านจุดกึ่งกลางของ DP ไปตัด AD ที่จุด Q แล้ว $\frac{AQ}{DQ}$ มีค่าเท่าไร

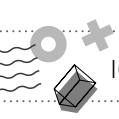
1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 1

15. สามเหลี่ยม ABC มีมุม $B = C$ กำหนดจุด D บน AB ที่ $AD : DB = 2 : 3$ ลากเส้นตรงจากจุด D มาตั้งฉากกับ BC ที่จุด E ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ 25 ตารางหน่วย แล้วสามเหลี่ยม AEO มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

1. 2 2. 3 3. 5 4. 7

16. สามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ 32 ตารางหน่วย ถ้าจุด M และ N อยู่บนด้าน AB และ AC ทำให้สามเหลี่ยม AMC และสามเหลี่ยม BNC มีพื้นที่ 8 ตารางหน่วยทั้งคู่ แล้วสามเหลี่ยม AMN มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

1. 3 2. 6 3. 9 4. 12



17. เทน้ำ 72 ลูกบาศก์หน่วย ใส่แก้วทรงกรวยความจุ 243 ลูกบาศก์หน่วย ที่มีจุดยอดกรวยเป็นกันแก้ว ถ้าวัดระดับน้ำสูงจากกันแก้ว 6 หน่วย แล้วแก้วโผล่สูงเท่าไร
1. 9 2. 10 3. 11 4. 12
18. กำหนดให้กรวยมีปริมาตร 1344π ลูกบาศก์หน่วย โดยมีความสูง 7 หน่วย ถัดตัดกรวยตามแนวสูงเอียง แล้วคลี่ออก จะได้รูปวงกลมที่ไม่เต็มวง จงหาว่าส่วนที่หายไปมีขนาดกี่องศาที่จุดศูนย์กลาง
1. 7.2 2. 14.4 3. 21.6 4. 28.8
19. ทรงกลมรัศมี 1 หน่วย บรรจุอยู่ในพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว 4 หน่วย ได้พอดี จงหาความสูงของพีระมิดนี้
1. $\frac{8}{3}$ 2. 3 3. 4 4. $\frac{16}{3}$
20. พีระมิดรูปหนึ่งมีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ยาวด้านละ 2 หน่วย ถ้าพีระมิดหน้าทุกหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วพีระมิดนี้มีส่วนสูงกี่หน่วย
1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 2. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 3. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 4. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
21. ถ้า $0^\circ < A < 90^\circ$ และ $\operatorname{cosec} A - \sec A = \sqrt{3}$ แล้ว $\cos A - \sin A$ มีค่าเท่าไร
1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{12}$
22. ถ้า $0^\circ < A < 90^\circ$ และ $\sec^4 A - \tan^4 A = 3$ แล้ว $\operatorname{cosec}^4 A - \cot^4 A$ มีค่าเท่าไร
1. 1 2. 2 3. 3 4. 4
23. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่งมี $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$ ถ้า $AC = 3BC$ แล้ว $\frac{AB}{BC}$ มีค่าเท่าไร
1. 1 2. $\sqrt{5}$ 3. 3 4. $\sqrt{10}$
24. ข้อใดมีค่ามากที่สุด
1. $\sqrt{\cos 62^\circ}$ 2. $\sqrt{\cos 58^\circ}$ 3. $\cos 62^\circ$ 4. $\cos 58^\circ$
25. ชาร์ลียืนอยู่ทางทิศใต้ของอาคารแห่งหนึ่งมองเห็นยอดอาคารเป็นมุมเงย 30 องศา และทีชียืนอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงของอาคารแห่งนั้นมองเห็นยอดอาคารเป็นมุมเงย 60 องศา ถ้าทั้งสองคนยืนห่างกัน 200 เมตร แล้วอาคารนี้สูงกี่เมตร (ไม่คำนึงถึงความสูงของทั้งสองคน)
1. $\sqrt{30}$ 2. $10\sqrt{30}$ 3. $20\sqrt{30}$ 4. $30\sqrt{30}$



เฉลยแนวข้อสอบ IJSO ชุดที่ 1

1. 3	2. 1	3. 2	4. 3	5. 3
6. 4	7. 2	8. 3	9. 4	10. 1
11. 3	12. 2	13. 4	14. 1	15. 3
16. 2	17. 1	18. 2	19. 1	20. 4
21. 1	22. 3	23. 4	24. 2	25. 3

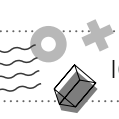
เฉลยอย่างละเอียด

1. จงหาค่าของ $\frac{8}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

1. $\sqrt{2}+\sqrt{6}+2$ 2. $\sqrt{2}+\sqrt{6}-2$ 3. $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+4$ 4. $2\sqrt{2}+2\sqrt{6}-4$

วิธีทำ ใช้วิธีคอนจูเกต (สังยุค)

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } \frac{8}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{8}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} \\
 &= \frac{8[(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}]}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{8[(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}]}{(1+2\sqrt{2}+2)-(3)} \\
 &= \frac{8(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} \\
 &= 2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\
 &= 2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+4
 \end{aligned}$$



2. จงหาค่าของ $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{2}{4}}} + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{2}{4}}}$

1. 1

2. 2

3. 3

4. 4

วิธีทำ ใช้การ “จัดรูป” เพื่อให้มองง่ายขึ้น จากโจทย์เราจะให้ $2^{\frac{1}{4}} = k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{2}{4}}} + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{2}{4}}} &= \frac{1}{1+\frac{1}{k}+k} + \frac{1}{1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}} + \frac{1}{1+k+k^2} \\ &= \frac{1}{\frac{k+1+k^2}{k}} + \frac{1}{\frac{k^2+k+1}{k^2}} + \frac{1}{1+k+k^2} \\ &= \frac{k}{k+1+k^2} + \frac{k^2}{k^2+k+1} + \frac{1}{1+k+k^2} \\ &= \frac{k^2+k+1}{k^2+k+1} = 1 \end{aligned}$$

3. จงหาค่าของ $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$

1. $-\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{2}$ 3. $-\sqrt{7}$ 4. $\sqrt{7}$

วิธีทำ เราจะจัดพยายามจัดรูปเพื่อ “กำจัดราก $\sqrt{\quad}$ ” ออกไปก่อน โดยพยายามทำข้างในรูปให้เป็น “กำลังสองสมบูรณ์” เพื่อจะได้ถอดรูดห่อออกไปได้ตามหลักการที่ว่า

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

หรือ

$$(A \pm B)^2 = (A^2 + B^2) \pm 2AB$$

ถ้า A และ B ติดรูป จะได้ $(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})^2 = (A+B) \pm 2\sqrt{AB}$

ลองจัดรูปโจทย์ใหม่ให้สอดคล้องกับสูตรกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$\begin{aligned} \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} &= \sqrt{4+\frac{2}{2}\sqrt{7}} - \sqrt{4-\frac{2}{2}\sqrt{7}} && [[\times \frac{2}{2} \text{ เพื่อจัดรูป เพราะในสูตรมีคูณ 2}]] \\ &= \sqrt{4+2\sqrt{\frac{7}{4}}} - \sqrt{4-2\sqrt{\frac{7}{4}}} \end{aligned}$$

เมื่อเทียบกับสูตรกำลังสองสมบูรณ์ พบว่า $A+B=4$ และ $\sqrt{AB}=\sqrt{\frac{7}{4}}$ แสดงว่า $A=\frac{7}{4}, B=\frac{1}{4}$



ดังนั้น

$$\begin{aligned}\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}} &= \sqrt{\frac{7}{2}+2\sqrt{\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}}}-\sqrt{\frac{7}{2}-2\sqrt{\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} \\ &= \left(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

4. จงหาค่าของ $2+\left(5^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}\left(5^{\frac{1}{2}}+2\right)^{-\frac{1}{2}}$

1. $\sqrt{2}$

2. 2

3. $\sqrt{5}$

4. 5

วิธีทำ $2+\left(5^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}\left(5^{\frac{1}{2}}+2\right)^{-\frac{1}{2}}=2+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}}$

$$=2+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}}$$

[[คูณด้วยคอนจูเกตของ $\sqrt{5}+2$]]

$$=2+\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{5-4}}$$

$$=2+\frac{\sqrt{5}-2}{1}=\sqrt{5}$$

5. ให้ $A=(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^3$ และ $B=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^3$ ถ้า $A+B=6$ แล้ว $A-B$ มีค่าเท่าไร

1. $2\sqrt{3}$

2. $3\sqrt{2}$

3. $4\sqrt{2}$

4. $2\sqrt{10}$

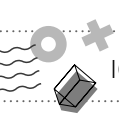
วิธีทำ ใช้การจัดรูปกำลังสองสมบูรณ์ของคำถาม

จากสมการ $A=(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^3$ และ $B=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^3$

จะได้ว่า $AB=\left[(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\right]^3$

$$AB=\left[(x+1)-x\right]^3$$

$$AB=1$$



จาก

$$A + B = 6$$

$$(A + B)^2 = 36$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = 36$$

$$\text{จัดรูปสมการ} \quad A^2 + 2AB + B^2 - 4AB = 36 - 4AB$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = 36 - 4$$

[[จาก $AB = 1$]]

$$(A - B)^2 = 32$$

จะได้ว่า

$$A - B = 4\sqrt{2}$$

6. ถ้า $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$ และ $B = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$ แล้ว $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199}$ มีค่าเท่าไร

1. $A - \frac{B}{2}$

2. $A + \frac{B}{2}$

3. $\frac{A}{2} - B$

4. $\frac{A}{2} + B$

วิธีทำ จากพจน์ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199}$ ถ้าเราสังเกตดีๆ จะไม่เห็น “พจน์ที่เป็นเลขคู่” เลย นั่นแสดงว่า พจน์ของเลขคู่ถูกลบออกไป ดังสมการ

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199} = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199} + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{200}\right)$$

ซึ่งเราก็สามารถจัดพจน์ให้ฝั่งลบกับฝั่งบวกอยู่คนละฝั่งได้แบบนี้

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{200}$$

[[เลข $\frac{1}{200}$ เป็นเลขคู่ตัวสุดท้ายที่ถูกลบออกไป]]

$$= \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}\right]$$

$$= \underbrace{\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}\right]}_{A+B} - \frac{1}{2} \underbrace{\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{100}\right]}_A$$

$$\text{จะได้ว่า } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199} = (A + B) - \frac{1}{2}A = \frac{A}{2} + B$$



7. จงหาค่าต่ำสุดของ $(x^2 - 2x)^2 + 6x^2 - 12x + 20$

1. 10

2. 15

3. 20

4. 25

วิธีทำ เนื่องจากในโจทย์เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เราจึงควรจัดรูปโจทย์ให้พจน์ภายในที่เหลือมีความคล้ายคลึงกับพจน์ที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ เพราะจะทำให้การจัดรูปในขั้นต่อไปทำได้ง่ายขึ้น

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 2x)^2 + 6x^2 - 12x + 20 &= \underbrace{(x^2 - 2x)^2}_k + 6\underbrace{(x^2 - 2x)}_k + 9 + 11 \\
 &= (k^2 + 6k + 9) + 11 \\
 &= \left(\underbrace{k}_{x^2 - 2x} + 3 \right)^2 + 11 \\
 &= (x^2 - 2x + 3)^2 + 11 \\
 &= \left(\underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{(x-1)^2} + 2 \right)^2 + 11 \\
 &= ((x-1)^2 + 2)^2 + 11
 \end{aligned}$$

ซึ่งพจน์ดังกล่าวจะมีค่าต่ำสุดก็ต่อเมื่อ แทนค่า $x = 1$

ดังนั้น จะมีค่าต่ำสุดเท่ากับ $(0^2 + 2)^2 + 11 = 15$

8. จิโนพายเรือตามน้ำจากบ้านไปโรงเรียนแล้วจึงพายทวนน้ำกลับบ้าน ถ้าอัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง และอัตราเร็วของกระแสน้ำมีค่าคงตัว และอัตราเร็วเฉลี่ยของการพายเรือไปกลับนี้เป็น 0.6 เท่าของอัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำ แล้วอัตราส่วนของอัตราเร็วการพายเรือในน้ำนิ่งต่ออัตราเร็วกระแสน้ำมีค่าเท่าไร

1. $\frac{1}{5}$

2. $\frac{2}{5}$

3. $\frac{5}{2}$

4. 5

วิธีทำ กำหนดให้

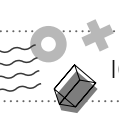
x คือ อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง

y คือ อัตราเร็วของกระแสน้ำ

S คือ ระยะทางระหว่างบ้านและโรงเรียน

v_1 คือ อัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำ $= x + y$

v_2 คือ อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำ $= x - y$



v_a คือ อัตราเร็วเฉลี่ย

$$t_1 \text{ คือ เวลาของการพายเรือตามน้ำ} = \frac{S}{x+y}$$

$$t_2 \text{ คือ เวลาของการพายเรือทวนน้ำ} = \frac{S}{x-y}$$

จากนิยามของอัตราเร็วเฉลี่ย คือ ระยะทางที่ใช้ทั้งหมดต่อเวลาที่ใช้ทั้งหมด นั่นคือ

$$v_a = \frac{s+s}{t_1+t_2}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{2S}{\frac{S}{x+y} + \frac{S}{x-y}} \\ &= \frac{2S}{\frac{Sx - Sy + Sx + Sy}{(x+y)(x-y)}} \\ &= \frac{2S(x+y)(x-y)}{2Sx} \\ &= \frac{(x+y)(x-y)}{x} \end{aligned}$$

เนื่องจาก “อัตราเร็วเฉลี่ยของการพายเรือไปกลับนี้เป็น 0.6 เท่าของอัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำ”

จะได้

$$\begin{aligned} v_a &= 0.6v_1 \\ \frac{(x+y)(x-y)}{x} &= \frac{3(x+y)}{5} \\ \frac{x-y}{x} &= \frac{3}{5} \\ 5x - 5y &= 3x \\ 2x &= 5y \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราส่วนของอัตราเร็วการพายเรือในน้ำนิ่งต่ออัตราเร็วกระแสน้ำ หรือ $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$



9. A, B และ C แข่งวิ่งระยะ 100 เมตร ถ้า A เริ่มที่จุดตั้งต้น B อยู่ข้างหน้า A 20 เมตร และ C อยู่ข้างหน้า B 20 เมตร แล้วทั้งสามคนถึงเส้นชัยพร้อมกันหมด ถ้าให้ B เริ่มที่จุดตั้งต้น และต้องการให้ B และ C ถึงเส้นชัยพร้อมกัน C ต้องเริ่มข้างหน้า B กี่เมตร ถ้าสมมติให้ทุกคนวิ่งด้วยอัตราเร็วสม่ำเสมอ

1. 10 2. 15 3. 20 4. 25

วิธีทำ จากโจทย์ เมื่อ A วิ่งได้ 100 เมตร แสดงว่า B จะวิ่งได้ 80 เมตร และ C จะวิ่งได้ 60 เมตร

ถ้า ให้ B วิ่งระยะ 100 เมตร C จะวิ่งได้ระยะทาง $\frac{100 \cdot 60}{80} = 75$ เมตร

ดังนั้น C จะต้องอยู่ข้างหน้า B เป็นระยะทาง 25 เมตร จึงจะทำให้ B และ C เข้าเส้นชัยพร้อมกัน

10. รถยนต์ยาว 5 เมตร วิ่งด้วยความเร็ว 65 กิโลเมตรต่อชั่วโมง สวนกับรถบรรทุกที่วิ่งมาด้วยความเร็ว 35 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้าวรถทั้งสองคันใช้เวลา 0.54 วินาที จึงวิ่งผ่านกันโดยสมบูรณ์ จงหาว่ารถบรรทุกยาวกี่เมตร

1. 10 2. 12 3. 15 4. 18

วิธีทำ เปลี่ยนหน่วยเวลาเป็นชั่วโมง เปลี่ยนหน่วยความเร็วเป็นเมตร

ให้ S_1 คือ ความยาวของรถยนต์

S_2 คือ ความยาวของรถบรรทุก

v_1 คือ อัตราเร็วของรถยนต์

v_2 คือ อัตราเร็วของรถบรรทุก

t คือ เวลาที่ใช้ในการวิ่งผ่านกัน

เวลาที่ใช้ในการวิ่งผ่านกัน คือ

$$t = \frac{S_1 + S_2}{v_1 + v_2}$$

จะได้ว่า

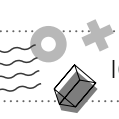
$$\frac{0.54}{3600} = \frac{5 + S_2}{65,000 + 35,000}$$

$$\frac{(0.54)(100,000)}{3600} = 5 + S_2$$

$$15 = 5 + S_2$$

$$10 = S_2$$

ดังนั้น รถบรรทุกยาว 10 เมตร



11. ส่วนของเส้นตรง AB ตัดส่วนของเส้นตรง CD ที่จุด M ซึ่ง $3AM = 4MB$ และ $3CM = MD$ ถ้า AB ยาว 28 หน่วย และมุม $\hat{A}BD = \hat{A}CD$ แล้ว CM ยาวกี่หน่วย

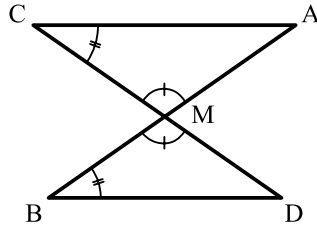
1. 4

2. 6

3. 8

4. 10

วิธีทำ จากโจทย์ สามารถวาดรูปได้ดังนี้



เนื่องจาก

$$3AM = 4MB$$

ดังนั้น

$$AM = \frac{4}{3}MB \quad \dots(1)$$

จากรูป

$$AB = AM + MB$$

จะได้ว่า

$$28 = \frac{4}{3}MB + MB \quad [[AB = 28]]$$

$$MB = 12$$

แทนค่า MB ใน (1) ได้

$$AM = 16$$

จากรูป

$$\frac{CM}{MB} = \frac{AM}{MD}$$

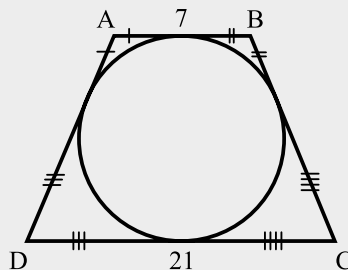
$$\frac{CM}{12} = \frac{16}{3CM}$$

$$[[3CM = MD]]$$

ดังนั้น

$$CM = 8$$

12. วงกลมรัศมี 6 หน่วย สัมผัสด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีด้านขนานกันยาว 7 หน่วย และ 21 หน่วย แล้วกำลังสองของผลต่างของความยาวอีกสองด้านที่เหลือของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีค่าเท่าไร



1. 1

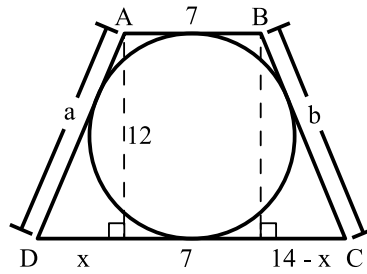
2. 4

3. 9

4. 16



วิธีทำ จากทฤษฎีได้ว่า $AD + BC = 28$



จากรูปจะได้ว่า $a + b = 28$... (1)

วงกลมรัศมี 6 หน่วย และทฤษฎีพีทาโกรัส

$$a^2 = 12^2 + x^2 \quad \dots (2)$$

$$b^2 = 12^2 + (14 - x)^2 \quad \dots (3)$$

นำ (2) - (3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= x^2 - (14 - x)^2 \\ (a - b)(a + b) &= x^2 - (196 - 28x + x^2) \\ (a - b)(28) &= 28x - 196 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a - b = x - 7$... (4)

นำ (1) + (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2a &= x + 21 \\ a &= \frac{x + 21}{2} \end{aligned}$$

นำค่า a ไปแทนใน (2)

$$\left(\frac{x + 21}{2} \right)^2 = 144 + x^2$$

จัดรูปสมการ $x^2 - 14x + 45 = 0$

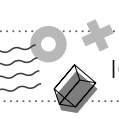
$$(x - 5)(x - 9) = 0$$

$$x = 5, 9$$

[[ใช้ตัวใดก็ได้ จะได้ผลลัพธ์เท่ากัน]]

เลือกใช้ $x = 9$ จะได้ว่า $a = 15$ และ $b = 13$

$$\text{ดังนั้น } |a - b|^2 = |15 - 13|^2 = 4$$



13. รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ยาวด้านละ 2 หน่วย มีเส้นทแยงมุมที่สั้นที่สุดยาวกี่หน่วย

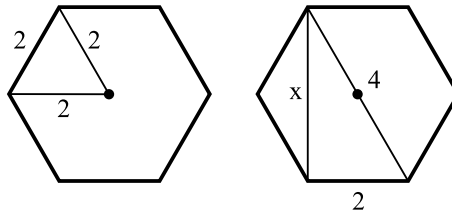
1. $\sqrt{2}$

2. $\sqrt{3}$

3. $2\sqrt{2}$

4. $2\sqrt{3}$

วิธีทำ



จากคุณสมบัติหกเหลี่ยมด้านเท่า จะมีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 6 รูป

ดังนั้น ให้ x เป็นความยาวของเส้นทแยงมุมที่สั้นที่สุด จากคุณสมบัติพีทาโกรัสจะได้ว่า

$$x^2 + 2^2 = 4^2$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

ดังนั้น เส้นทแยงมุมที่สั้นที่สุดยาว $2\sqrt{3}$ หน่วย

14. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มีจุด P อยู่บนด้าน AB ทำให้ $AP = 3PB$ ถ้าลากเส้นตรงจากจุด C ผ่านจุดกึ่งกลางของ DP ไปตัด AD ที่จุด Q แล้ว $\frac{AQ}{DQ}$ มีค่าเท่าไร

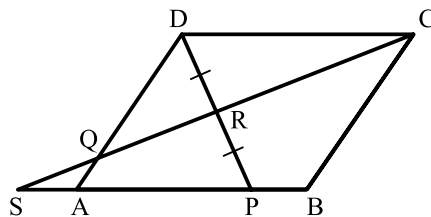
1. $\frac{1}{4}$

2. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{1}{2}$

4. 1

วิธีทำ จากโจทย์ สามารถสร้างรูปได้ดังนี้



โจทย์ถามเป็นอัตราส่วน ดังนั้น สามารถสมมติเลขขึ้นมาได้ เพื่อง่ายต่อการทำโจทย์

กำหนดให้ $PB = 1$ หน่วย

ดังนั้น $AP = 3$ หน่วย

ทำให้ $AB = AP + PB = 3 + 1 = 4$

จากคุณสมบัติสี่เหลี่ยมด้านขนาน ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน ทำให้ DC ยาว 4 หน่วย