



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 10
ฉบับปรับปรุงใหม่

วิธีเชิงตัวเลข

ทางวิทยาศาสตร์
และวิศวกรรม

MATLAB, C
Mathematica
Fortran, Pascal

Numerical Methods
in Science
and Engineering

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
นิพนธ์ วรรณโสภาคย์

วิธีเชิงตัวเลข

ทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม

วิธีเชิงตัวเลข

ทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
นิพนธ์ วรรณโสภากย์



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2560

470.-

ปราโมทย์ เศษอำไพ

วิธีเชิงตัวเลขทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม / เขียนโดย ปราโมทย์ เศษอำไพ, นิพนธ์ วรรณโสภากย์

1. วิธีเชิงตัวเลข. 2. นิพนธ์ วรรณโสภากย์

620.0001

ISBN 978-974-03-3679-2

สพจ. 454/10



สรสคุณคำวิชาการ ผู้สังคม

www.ChulaPress.com

Knowledge to All

ลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2538

พิมพ์ครั้งที่ 2 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2541 (ฉบับปรับปรุงแก้ไข)

พิมพ์ครั้งที่ 3 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2544

พิมพ์ครั้งที่ 4 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2546

พิมพ์ครั้งที่ 5 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2549 (ฉบับปรับปรุงแก้ไข)

พิมพ์ครั้งที่ 6 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2551 (ฉบับปรับปรุงแก้ไข)

พิมพ์ครั้งที่ 7 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2553 (ฉบับปรับปรุงแก้ไข)

พิมพ์ครั้งที่ 8 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2555 (ฉบับปรับปรุงแก้ไข)

พิมพ์ครั้งที่ 9 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2557 (ฉบับปรับปรุงแก้ไข)

พิมพ์ครั้งที่ 10 จำนวน 1,000 เล่ม พ.ศ. 2560 (ฉบับปรับปรุงแก้ไข)

การพิมพ์และการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น

ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผู้จัดทำหน้า
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา ศาลาพระเกี้ยว โทร. 0-2218-7003 โทรสาร 0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495

ม.นครสวรรค์ จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239

โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023

ม.พะเยา จ.พะเยา โทร. 0-5446-6799-800 โทรสาร 0-5446-6798

จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304

หัวหมาก โทร. 0-2374-1378 โทรสาร 0-2374-1377

ม.เทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4492-2662-3 โทรสาร 0-4492-2664

มือถือ 08-6392-7785

Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com>

และเครือข่าย

ร้านค้า หนังสือเข้าชั้นเรียน ติดต่อแผนกขายส่ง สาขาหัวหมาก โทร. 0-2374-1375-6 โทรสาร 0-2374-1375

กองบรรณาธิการ : จุฑามาศ พิทักษ์วัชร

ออกแบบปก : นิธินันท์ วงศ์ชัชกุล

ออกแบบรูปเล่ม : ไกรอัมพร พงษ์จรัส

พิมพ์ที่ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (6102-0351) โทร. 0-2218-3562 โทรสาร 0-2218-3551

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 10

เนื่องจากวิธีเชิงตัวเลขได้ถูกนำไปใช้ในการเรียนการสอนในหลากหลายสาขามากยิ่งขึ้น ผู้เขียนจึงได้เปลี่ยนชื่อหนังสือจากเดิมไปเป็น “วิธีเชิงตัวเลขทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม” โดยได้ปรับปรุงเนื้อหาให้มีความกระชับเข้าใจได้โดยง่าย และลดขนาดของตัวอักษรลงเพื่อลดราคาหนังสือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งเขียนด้วยภาษาต่าง ๆ ได้นำขึ้นเว็บไซต์ชื่อ

<https://goo.gl/mcMVDE>

เพื่อผู้อ่านสามารถดาวน์โหลดมาใช้ได้โดยตรง โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้สอดคล้องกับเนื้อหาทฤษฎีในหนังสือ ทำให้ผู้ศึกษาสามารถทำความเข้าใจได้อย่างรวดเร็ว อันจะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาความรู้ทางด้านนี้เพื่อสามารถใช้ซอฟต์แวร์ในระดับสูงได้อย่างถูกต้องและการทำวิจัยต่อเนื่องขึ้นไป

ผู้เขียนขอขอบคุณ น.ส.เบญจภา ขนัคสกุล นิสิตปริญญาโทผู้ตรวจสอบความถูกต้องของการพิมพ์ครั้งนี้ อนึ่ง หากท่านอาจารย์ผู้สอนต้องการคู่มือเฉลยและไฟล์นำเสนอเพื่อสะดวกแก่การอธิบายในชั้นเรียน โปรดแจ้งความจำนงค์มายังสำนักพิมพ์ฯ เพื่อจัดส่งไปยังท่านอาจารย์ที่สถาบันการศึกษาโดยไม่เสียค่าใช้จ่ายใด ๆ ครับ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

นิพนธ์ วรรณโสภากย์

ตุลาคม 2560

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 9

เนื่องจากหนังสือเล่มนี้ได้รับการตอบรับจากนิสิตนักศึกษาและผู้สนใจในพื้นฐานของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอย่างกว้างขวาง ผู้เขียนและลูกศิษย์ได้จัดเตรียมคู่มือเฉลยสำหรับแบบฝึกหัดทุกข้อ รวมทั้งไฟล์สำหรับการนำเสนอเพื่อสะดวกแก่การอธิบายในชั้นเรียน หากท่านอาจารย์ต้องการคู่มือเฉลยและไฟล์นำเสนอโปรดแจ้งความจำนงมายังสำนักพิมพ์ฯ ทางสำนักพิมพ์ฯ จะส่งไปให้ท่านอาจารย์โดยตรงที่สถาบันศึกษาโดยไม่เสียค่าใช้จ่ายใด ๆ ครับ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

นิพนธ์ วรรณโสภากย์

มกราคม 2557

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 8

ในปัจจุบัน วิชาการเชิงตัวเลข (Numerical methods) และวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical analysis) ได้เปิดสอนกันโดยทั่วไปตามภาควิชาต่าง ๆ ในคณะวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ทั้งนี้ก็เพราะว่าวิชาเช่นนี้ช่วยแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีความยากขึ้นไปได้อีกระดับหนึ่ง นอกจากนี้ยังมีคอมพิวเตอร์ซอฟต์แวร์ทางด้านนี้ที่ใช้กันอย่างกว้างขวาง ทำให้ผู้ใช้จำเป็นต้องเข้าใจในกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในซอฟต์แวร์เหล่านี้เพื่อความมั่นใจในผลลัพธ์ที่คำนวณได้

ผู้เขียนและลูกศิษย์ได้จัดเตรียมคู่มือเฉลยของแบบฝึกหัดทุกข้อ รวมทั้งไฟล์ PowerPoint สำหรับการนำเสนอเนื้อหาของทุกบท เพื่อให้หนังสือเล่มนี้สามารถใช้ในการสอนได้อย่างครบวงจร ซึ่งทางสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยได้ให้ความกรุณาจัดพิมพ์คู่มือเฉลยแบบฝึกหัดขึ้นเป็นเล่มอย่างสวยงาม หากท่านอาจารย์ต้องการคู่มือเฉลยแบบฝึกหัดเพื่อใช้ในการสอน โปรดแจ้งความจำนงค์มายังสำนักพิมพ์ฯ โดยไม่ต้องเสียค่าใช้จ่ายใด ๆ เพื่อให้ศาสตร์ทางด้านนี้ได้เป็นประโยชน์ต่อการเรียนรู้ของเยาวชนไทยมากยิ่งขึ้นครับ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

นิพนธ์ วรรณโสภาคย์

เมษายน 2555

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 7

ในการจัดพิมพ์หนังสือ “ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม” ใหม่ครั้งที่ 7 นี้ ผู้เขียนได้ตรวจสอบเนื้อหาให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น นอกจากนั้นยังได้จัดเตรียมคู่มือเฉลยของแบบฝึกหัดทุกข้อ และไฟล์ PowerPoint สำหรับการนำเสนอเนื้อหาของทุกบท เพื่อให้หนังสือเล่มนี้สามารถใช้ในการสอนได้อย่างครบวงจร

สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยได้ให้ความกรุณาจัดพิมพ์คู่มือเฉลยแบบฝึกหัดขึ้นเป็นเล่มอย่างสวยงาม หากท่านคณาจารย์ต้องการคู่มือเฉลยแบบฝึกหัดเพื่อใช้ในการสอน โปรดแจ้งความจำนมายังสำนักพิมพ์ฯ โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายใด ๆ

ผู้เขียนมีความยินดีที่หนังสือเล่มนี้ได้รับการตอบรับจากผู้อ่านเป็นอย่างดี และมีความภาคภูมิใจเป็นอย่างยิ่งที่เนื้อหาในหนังสือ ได้ช่วยยกระดับความเข้าใจในศาสตร์ด้านการคำนวณนี้แก่นิสิตนักศึกษาไทย อีกทั้งคอมพิวเตอร์โปรแกรมหลายโปรแกรมที่ได้นำเสนอในหนังสือเล่มนี้ ได้นำไปใช้เป็นพื้นฐานของการทำวิทยานิพนธ์ในระดับบัณฑิตศึกษาตามสถาบันการศึกษาและมหาวิทยาลัยต่าง ๆ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

นิพนธ์ วรรณโสภากย์

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พฤษภาคม 2553

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 6

ในการจัดพิมพ์ครั้งที่ 6 ผู้แต่งได้ปรับปรุงตำราเล่มนี้ให้มีเนื้อหาที่ทันสมัยและครอบคลุมองค์ความรู้ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมากยิ่งขึ้น องค์ความรู้ใหม่ที่เกิดขึ้นในปัจจุบัน เช่น ระเบียบวิธีคอนจูเกตเกรเดียนต์เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้อธิบายโดยละเอียดพร้อมโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถนำไปใช้ได้โดยตรง ตลอดจนรายละเอียดของเนื้อหาอื่น ๆ ซึ่งผู้เขียนได้รับคำถามจากนิสิตนักศึกษาในช่วงหลายปีที่ผ่านมา จึงได้เพิ่มคำอธิบายพร้อมแสดงสมการเพื่อให้สามารถเข้าใจได้โดยชัดเจนเช่นกัน

ในการจัดพิมพ์ครั้งนี้ ผู้แต่งยังได้แทรกเนื้อหาและวิธีการใช้งานของแมทแลบ (MATLAB) ซึ่งเรียบเรียงเพิ่มเติมขึ้นโดย อาจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภากย์ ที่สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้อย่างมีประสิทธิภาพ ผู้ที่ศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยความเข้าใจในทฤษฎีซึ่งนำเสนออย่างละเอียดในตำราเล่มนี้ จึงมีความมั่นใจและสามารถใช้แมทแลบได้อย่างถูกต้อง ทราบที่มาของคำตอบซึ่งเกิดขึ้นจากโปรแกรมเช่นนี้ได้โดยชัดเจน โปรแกรมย่อยทุกโปรแกรมที่ปรากฏในหนังสือเล่มนี้ได้นำเสนอด้วยภาษาที่นิยมใช้กันในปัจจุบัน คือ ภาษาฟอร์แทรน แมทแลบ ซี และปาสคาล เพื่อนิสิตนักศึกษาสามารถนำไปใช้ทำวิทยานิพนธ์ได้โดยตรง

นอกจากนั้น ผู้เขียนยังได้เพิ่มแบบฝึกหัด รูปภาพ และภาคผนวก ที่ช่วยให้ผู้ศึกษาสามารถทำความเข้าใจในเนื้อหาได้โดยละเอียดลึกซึ้งมากยิ่งขึ้น ความเข้าใจในเนื้อหาอย่างลึกซึ้งนี้เองจะเป็นรากฐานที่สำคัญเพื่อศึกษาระเบียบวิธีการคำนวณในระดับสูงขึ้นไป ซึ่งปัจจุบันได้กลายเป็นเครื่องมือที่สำคัญเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในภาคอุตสาหกรรมของไทย

ผู้เขียนขอขอบคุณนางสาวไกรอัมพร พงษ์จักร ผู้ช่วยวิจัยของผู้เขียน ตลอดจนนิสิตปริญญาเอก นายสุธี ไตรวิวัฒนา นายอธิพงษ์ มาลาทิพย์ นายปริญญา บุญมาเลิศ นางสาวพัชรี ธีระเอก และนิสิตปริญญาโท นายพิชฌญนท์ โพธิคุณ และนายสุทธินันท์ พันธิมารกิจ ที่ช่วยกันจัดรูปแบบของสมการให้มี ความทันสมัย และตรวจสอบความถูกต้องให้ตำราเล่มนี้ มีความสมบูรณ์ ผู้เขียนขอขอบคุณ Techsource Systems (Thailand) Co., Ltd. ตัวแทนจำหน่าย MATLAB ในประเทศไทย และขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนในการจัดพิมพ์ตำราเล่มนี้มาโดยตลอด

ปราโมทย์ เคชะอำไพ

นิพนธ์ วรรณโสภากย์

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พฤษภาคม 2551

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 5

ตำรา “ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม” (Numerical Methods in Engineering) อธิบายพื้นฐานของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นในการเรียนรู้ระเบียบวิธีการคำนวณในระดับสูงขึ้นไป เพื่อวิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ เช่น ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method) เป็นต้น เนื้อหาในตำราเล่มนี้ได้เขียนขึ้นจากประสบการณ์การสอนและการวิจัยของผู้เขียนทั้งในและต่างประเทศ โดยมีจุดประสงค์หลักเพื่อให้เกิดความเข้าใจได้โดยง่ายที่สุด

ผู้เขียนมีความปิติยินดีเป็นอย่างยิ่งที่ตำราเล่มนี้ได้นำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนของอาจารย์ตามมหาวิทยาลัยทั้งในส่วนกลางและส่วนภูมิภาค อีกทั้งยังได้นำไปใช้อ้างอิงในการทำวิทยานิพนธ์ของนิสิตนักศึกษาจำนวนมาก ดังนั้น ในการพิมพ์ครั้งที่ 5 นี้ จึงได้เรียบเรียงรูปเล่มการนำเสนอใหม่ทั้งหมดเพื่อให้เกิดความทันสมัยและอ่านได้ง่ายมากยิ่งขึ้น

ผู้เขียนขอขอบคุณนางสาวไกรอำพร พงษ์ขจร ผู้ช่วยวิจัยของผู้เขียนในความอุตสาหะจัดพิมพ์รูปเล่มขึ้นมาใหม่ ขอขอบคุณนิสิตปริญญาเอก นายอิทธิพงษ์ มาลาทิพย์ นายสุธี ไตรวิวัฒนา และนายปริญญา บุญมาเลิศ ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องทำให้หนังสือมีความสมบูรณ์ และขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนจัดพิมพ์ตำราเล่มนี้มาอย่างต่อเนื่อง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พฤษภาคม 2549

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 4

ตำรา “ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม” เล่มนี้ ได้แต่งขึ้นมาจากความตั้งใจ เพื่อต้องการให้นิสิตนักศึกษาเกิดความเข้าใจในวิชานี้ได้โดยง่าย อันจะเป็นผลต่อเนื่องในการเรียนรู้ระเบียบวิธีการคำนวณขั้นสูง และจะเป็นประโยชน์ต่อการประยุกต์ใช้วิเคราะห์ปัญหาจริงในทางปฏิบัติ ผู้เขียนมีความยินดีที่หนังสือเล่มนี้ได้รับการตอบรับจากนิสิตนักศึกษาและผู้สนใจโดยทั่วไปเป็นอย่างดี ทั้งจากจำนวนของการจัดจำหน่าย จากคำถามต่อเนื่องของนิสิตนักศึกษาเพื่อนำไปใช้ในการทำวิทยานิพนธ์ รวมทั้ง e-mails จากผู้อ่านหลายท่านที่เขียนมาให้กำลังใจ ดังเช่นจากนักศึกษาไทยในต่างประเทศท่านนี้

“I am Thai student krub. Last 2 years, I went back to Thailand and picked up some books on the Numerical Methods in Engineering and I was lucky, I got your book and that book helps me to understand the classic and basic theories of the Numerical Methods. I would like to thank you for producing such a good book and I still use that book as my bible.”

ซึ่งก่อให้เกิดความยินดีและความภาคภูมิใจทุกครั้งที่ได้รับ ผู้เขียนขอขอบคุณมากครับ

ปราโมทย์ เศษะอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
สิงหาคม 2546

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 3

การออกแบบงานทางวิศวกรรมด้วยวิธีการคำนวณในปัจจุบันต้องพึ่งพาซอฟต์แวร์ทางด้าน CAE (Computer-Aided Engineering) เป็นอย่างมาก ซอฟต์แวร์เหล่านี้ใช้ระเบียบวิธีการคำนวณขั้นสูง เช่น Finite difference method, Finite element method, Finite volume method เป็นต้น ซึ่งล้วนตั้งอยู่บนรากฐานขององค์ความรู้ทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical methods) อีกต่อหนึ่ง ทำให้ความรู้ความเข้าใจในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขกลายเป็นสิ่งจำเป็นเพื่อสามารถใช้ซอฟต์แวร์ต่าง ๆ ดังกล่าวข้างต้นได้อย่างถูกต้อง

ตำรา “ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม” เล่มนี้ ได้แต่งขึ้นจากประสบการณ์ของการสอนและการทำวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศมากกว่า 25 ปี ด้วยความตั้งใจต้องการให้นิสิตนักศึกษาไทยได้เล็งเห็นว่าระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเป็นวิชาที่สามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย ก่อให้เกิดความสนใจอยากเรียนรู้ อันจะเป็นผลต่อเนื่องสู่การทำความเข้าใจในระเบียบวิธีการคำนวณระดับสูงขึ้นไป ที่จะเป็นประโยชน์ต่ออาชีพของตนเองในอนาคตและการพัฒนาประเทศไทยเราในที่สุด

ผู้เขียนขอขอบพระคุณคณาจารย์จากสถาบันต่าง ๆ ทั้งในกรุงเทพมหานครและต่างจังหวัดที่ได้นำตำราเรียนเล่มนี้ไปใช้ในการสอนเพื่อเผยแพร่ความรู้ทางด้านนี้สู่วงการศึกษไทย หากท่านอาจารย์มีข้อคิดเห็นใด ๆ เกี่ยวกับตำราเล่มนี้ หรือต้องการให้กระผมนำเสนอผลงานการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมจำนวนมากในทางปฏิบัติที่เกิดขึ้นจากประสบการณ์ของกระผม ซึ่งตั้งอยู่บนพื้นฐานในการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนี้ เพื่อช่วยผลักดันนิสิตนักศึกษาไทยให้เกิดความสนใจอยากเรียนรู้ในวิชานี้มากขึ้น กรุณาติดต่อมาได้โดยตรง กระผมจะมีความยินดีเป็นอย่างยิ่งครับ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
มกราคม 2544

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 2

ในปัจจุบัน ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ถูกจัดให้เป็นวิชาบังคับสำหรับการเรียนวิศวกรรมศาสตร์ และวิทยาศาสตร์สาขาต่าง ๆ ทั้งในระดับปริญญาตรีและบัณฑิตศึกษาเกือบทุกสถาบัน เนื่องจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเป็นวิชาพื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ในการศึกษาระเบียบวิธีการคำนวณขั้นสูงต่อไป เช่น ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ฯลฯ ประกอบกับการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางด้านการคำนวณในปัจจุบัน ผู้ใช้จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานของการคำนวณ จึงจะสามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่าง ๆ ได้ถูกต้องอย่างมีประสิทธิภาพ นักศึกษารวมทั้งผู้ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้จึงเริ่มตระหนักถึงความสำคัญของความรู้ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

หลังจากการพิมพ์ครั้งแรก หนังสือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเล่มนี้ได้ถูกนำไปใช้เป็นหนังสือประกอบการสอนตามสถาบันต่าง ๆ ทั้งในกรุงเทพมหานครและต่างจังหวัด ผู้เขียนมีความยินดีเป็นอย่างยิ่งที่ผู้อ่านได้ให้ความเห็นกันมาว่า หนังสือเล่มนี้อ่านง่ายสะดวกแก่การทำความเข้าใจ ซึ่งเป็นความตั้งใจหลักของผู้เขียนในการเขียนหนังสือเล่มนี้ตั้งแต่แรก ที่ต้องการวางพื้นฐานระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนี้ให้แก่คณาจารย์ไทยให้ง่ายในการทำความเข้าใจ และที่สำคัญที่สุด ไม่นึกเกรงกลัวหรือกังวลในการศึกษาวิชาระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพราะวิชานี้เองเป็นวิชาพื้นฐานที่เปรียบเสมือนบันไดขั้นแรกเพื่อการศึกษาระเบียบวิธีการคำนวณในระดับสูงขึ้นไป

ในการพิมพ์ครั้งที่สองนี้ อาจารย์วิโรจน์ ล้มตระการ แห่งภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ได้ให้ความกรุณาช่วยดัดแปลงโปรแกรมทุกโปรแกรมจากภาษาฟอร์แทรนซึ่งผู้เขียนได้ประดิษฐ์ขึ้นไปเป็นภาษาซี ดังได้แสดงในภาคผนวก ง จึงขอขอบคุณมา ณ ที่นี้ อนึ่ง ผู้เขียนได้จัดทำแผ่นใสเพื่อใช้ประกอบการสอนโดยใช้เนื้อหาจากหนังสือเล่มนี้เป็นจำนวนทั้งหมดกว่า 300 แผ่น โดยจัดทำขึ้นเป็นภาษาอังกฤษทั้งหมดเพื่อสะดวกในการใช้สอนนิสิตนักศึกษาทั้งภาคภาษาไทยและอังกฤษ ในปัจจุบันอักษรบนแผ่นใสเหล่านี้มีขนาดใหญ่ได้มาตรฐานสำหรับการนำเสนอสามารถนำไปใช้ในการสอนได้โดยตรงดัดแปลงแก้ไข เนื้อหาในแผ่นใสทั้งหมดนี้ได้บรรจุในไฟล์ไมโครซอฟต์เวิร์ด (Microsoft Word) บนแผ่นดิสก์ขนาด 3.5 นิ้ว จำนวน 3 แผ่น อาจารย์ท่านใดต้องการไฟล์เหล่านี้ กรุณาติดต่อขอได้โดยตรงจากกระผมครับ

เนื่องจากการเรียนวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และศาสตร์ในสาขาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ในอนาคต จำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเป็นเครื่องมือพื้นฐานในการคำนวณ อันจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความหมายเพื่อสามารถทำความเข้าใจได้ กระผมจึงหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือ

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อนิสิตนักศึกษาไทย เปรียบเสมือนบันไดขั้นแรกที่จะนำไปสู่
ความสามารถเพื่อทำการคำนวณแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มกราคม 2541

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 1

ตำราระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเล่มนี้ ได้เรียบเรียงขึ้นเนื่องมาจากสาเหตุหลายประการ เริ่มตั้งแต่การได้สอนวิชานี้ให้แก่ นักศึกษา คณะวิศวกรรมศาสตร์ระดับปริญญาตรีและบัณฑิตศึกษา ที่มหาวิทยาลัยจอร์จ วอชิงตัน (George Washington University) และมหาวิทยาลัยโอลด์โดมินเนียน (Old Dominion University) การได้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหลาย ๆ ระเบียบวิธีในวิชานี้ในการสอนวิชาอื่น ๆ ที่มีการคำนวณประกอบ รวมไปถึงการได้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหลาย ๆ ระเบียบวิธีในวิชาอื่นอีกเช่นกันสำหรับงานวิจัยค้นคว้าในขณะที่ผู้เขียนรับราชการอยู่ในองค์การอวกาศนาซา

จากการที่ได้สอนวิชานี้ในชั้นเรียนและการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีต่าง ๆ ในงานวิจัย ผู้เขียนได้พบว่า ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเป็นวิชาที่สามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย หากผู้ศึกษาให้ความสนใจแก่เนื้อหาของระเบียบวิธีการต่าง ๆ อย่างซัดแน่น โดยเฉพาะหากผู้ศึกษาได้มีโอกาสประยุกต์ระเบียบวิธีการนั้น ๆ ในงานการคำนวณทางปฏิบัติบ้าง ก็จะก่อให้เกิดความเข้าใจได้อย่างลึกซึ้งมากยิ่งขึ้น จากประสบการณ์ของการสอนดังกล่าว ผู้เขียนได้พบว่า อุปสรรคที่สำคัญต่อการเข้าถึงแก่นแท้ของวิชานี้ไม่ใช่เนื้อหาของวิชานี้แต่เพียงอย่างเดียว แต่รวมไปถึงความรู้พื้นฐานที่สืบเนื่องมาจากวิชาอื่น ๆ นับตั้งแต่ ความเข้าใจในคณิตศาสตร์พื้นฐาน ความเข้าใจในภาษาคอมพิวเตอร์ ความสามารถในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ตลอดจนแนวความคิดในการมองปัญหาให้มีความหมายทางกายภาพ ที่นอกเหนือไปจากการมองปัญหาในรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์

ด้วยเหตุผลต่าง ๆ ดังกล่าว จุดประสงค์ที่สำคัญของผู้เขียนในการเรียบเรียงตำราเล่มนี้ คือการเขียนอธิบายเนื้อหาของวิชานี้เพื่ออ่านให้เข้าใจได้ง่ายที่สุดเท่าที่จะทำได้ ในขณะเดียวกันก็พยายามสร้างแนวความคิดให้ผู้ศึกษาได้มองปัญหาให้มีความหมายทางกายภาพโดยการใช้คำอธิบายหรือตัวอย่างประกอบที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจ ส่วนการเสริมความรู้ความเข้าใจในภาษาคอมพิวเตอร์ ผู้เขียนได้ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับทุก ๆ ระเบียบวิธีการเท่าที่จะสามารถทำได้ โดยมีจุดประสงค์ให้ผู้ศึกษาได้เกิดความคุ้นเคย และในขณะเดียวกัน เพื่อสร้างความมั่นใจในการใช้ระเบียบวิธีการนั้น ๆ ได้อย่างถูกต้องก่อนนำไปประยุกต์กับปัญหาจริงที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ในทุก ๆ ครั้งที่ผู้เขียนได้สอนวิชานี้ ผู้เขียนจะกล่าวอยู่เสมอว่า การประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นสิ่งที่สอนกันได้ลำบาก ความสามารถในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้น เกิดจากประสบการณ์ที่สะสมกันมานานด้วยการฝึกฝนอย่างสม่ำเสมอ หากเกิดความสามารถในทางด้านนี้ที่จะเสริมเข้ากับความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์แล้ว ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจะเปิดโอกาสให้สามารถทำการคำนวณปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพเพื่อใช้หาผลลัพธ์ได้อย่างรวดเร็ว

วิวัฒนาการของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ปรับปรุงไปอย่างรวดเร็วในปัจจุบันทำให้วิธาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขกลายเป็นวิชาที่มีความสำคัญมากทั้งในสาขาวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ วิชาต่าง ๆ เริ่มเพิ่มส่วนของการคำนวณลงในเนื้อหา ทำให้ผู้ศึกษาได้เห็นผลลัพธ์ของตัวเลขที่ก่อให้เกิดความหมายทางกายภาพแทนที่จะเป็นเพียงสมการทางคณิตศาสตร์เช่นในอดีต นิสิตนักศึกษาโดยเฉพาะระดับบัณฑิตศึกษาในปัจจุบันจึงควรมีความรู้พื้นฐานของวิชานี้เพื่อที่จะนำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณสำหรับวิชาอื่น ๆ ได้รวมไปถึงการทำวิทยานิพนธ์

ตำราระเบียบวิธีเชิงตัวเลขภาษาไทยเล่มนี้ ผู้เขียนได้แต่งเรียบเรียงขึ้นมาจากเอกสารประกอบการสอนที่ผู้เขียนได้เคยสอนมาทั้งในประเทศและต่างประเทศ ตัวอย่างหลายตัวอย่างได้ดัดแปลงมาจากผลงานวิจัยของผู้เขียนที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ เนื้อหาทั้งหมดที่บรรจุในตำราเล่มนี้ ได้จัดเรียบเรียงให้เป็นขั้นเป็นตอนโดยเริ่มจากหัวข้อที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจขึ้นไป ความรู้ความเข้าใจที่ได้ศึกษาในบทแรก ๆ จะนำไปใช้ในบทต่อ ๆ ไป ผู้เขียนได้พยายามรวบรวมเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานและมีความสมบูรณ์ให้มากที่สุด เริ่มตั้งแต่การแนะนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลข การหารากของสมการ ไปจนถึงระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า เนื้อหาที่บรรจุในตำราเล่มนี้จะช่วยสนับสนุนให้นิสิตนักศึกษาในมหาวิทยาลัยต่าง ๆ ของเรา ได้มีความรู้พื้นฐานในทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณ และในขณะเดียวกัน ได้เกิดความสามารถในการประยุกต์ทฤษฎีเหล่านี้เพื่อใช้ในการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ ซึ่งความรู้ความสามารถดังกล่าว ได้กลายเป็นสิ่งจำเป็น เพื่อการก้าวทันเทคโนโลยีของการคำนวณในปัจจุบัน

เนื้อหาทั้งหมดในตำราเล่มนี้ นับตั้งแต่ข้อความทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษ สมการทางคณิตศาสตร์ และรูปภาพต่าง ๆ ได้จัดทำขึ้นบนเครื่องคอมพิวเตอร์เองทั้งหมด ผู้เขียนขอขอบคุณ นางสาวนฤมล อารมณ์สวะ ผู้ช่วยวิจัยของผู้เขียน ผู้พิมพ์ตำราเล่มนี้ให้ผู้เขียนเป็นเล่มที่สองด้วยความตั้งใจและความมุมานะ ผู้เขียนขอขอบคุณ นายวิโรจน์ แซ่ลี้มน นิสิตปริญญาโท ผู้รับอาสาแปลโปรแกรมต่าง ๆ จากภาษาฟอร์แทรนที่ผู้เขียนได้ประดิษฐ์ขึ้นไปเป็นภาษาปาสคาลซึ่งทำให้ตำราเล่มนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น และนายจิรพงศ์ กสิวิทย์อำนวย นิสิตปริญญาโท ผู้ช่วยอ่านตรวจทานต้นฉบับอย่างละเอียด ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.มงคล เชนนครินทร์ ผู้ให้คำแนะนำในการแต่งตำราภาษาไทยและให้ความกรุณาในการตรวจคำศัพท์บัญญัติต่าง ๆ รวมทั้งสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยซึ่งเป็นหน่วยงานที่รับผิดชอบพิมพ์จำหน่ายหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่ทำให้ผู้เขียนได้มีโอกาสไปศึกษาและสัมผัสกับความรู้ทางวิชาการด้านนี้ ตลอดจนทั้งอาจารย์และหัวหน้าหน่วยงานในขณะที่ยังเขียนดำรงตำแหน่งเป็นข้าราชการประจำอยู่ในองค์การอวกาศนาซา ที่ได้ให้ความรู้และเปิดโอกาสให้ผู้เขียนได้ทำงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณมาโดยตลอด และท้ายสุด ขอขอบคุณ ขุพา เศรษฐอำไพ ภรรยาผู้เข้าใจความตั้งใจของผู้เขียน โดยให้การสนับสนุนและกำลังใจ ตลอดจนคอยดูแลลูก ๆ ทั้งวันเสาร์-

อาทิตย์ เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เขียนได้อุทิศเวลาให้กับตำราเล่มนี้ได้อย่างเต็มที่ ในช่วงระยะเวลาหลายเดือนที่ผ่านมา

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ตุลาคม 2538

สารบัญ

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 10

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 9

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 8

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 7

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 6

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 5

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 4

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 3

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 2

คํานําพิมพ์ครั้งที่ 1

บทที่ 1	ก้าวแรกสู่วิธีเชิงตัวเลข	1
1.1	บทนำ	1
1.2	วิธีเชิงตัวเลขคืออะไร	3
1.3	ความสำคัญของการศึกษาวิธีเชิงตัวเลข	4
1.4	คอมพิวเตอร์	10
1.5	ความผิดพลาด	13
1.6	บทสรุป	17
	แบบฝึกหัด	18
บทที่ 2	รากของสมการ	23
2.1	บทนำ	23
2.2	วิธีการ	25
2.3	วิธีการแบ่งครึ่งช่วง	26
2.4	วิธีการวางตัวผิ	29
2.5	วิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด	33
2.6	วิธีของนิวตัน-ราฟสัน	36
2.7	วิธีเซแคนต์	41

2.8	คำสั่งสำเร็จรูปในแม่ทแลบสำหรับการหาคของสมการ	42
2.9	วิธีการหาคของระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น	45
2.9.1	วิธีการทำซ้ำโดยตรง	46
2.9.2	วิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน	47
2.10	บทสรุป	50
	แบบฝึกหัด	51

บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น 59

3.1	บทนำ	59
3.2	กฎของคราเมอร์	62
3.3	วิธีการกำจัดแบบเกาส์	64
3.4	ปัญหาที่อาจเกิดขึ้นจากวิธีการกำจัดแบบเกาส์	69
3.4.1	ปัญหาจากการหารด้วยศูนย์	69
3.4.2	ปัญหาความผิดพลาดจากการปัดเศษ	70
3.4.3	ปัญหาระบบสมการในภาวะไม่เหมาะสม	70
3.5	การปรับปรุงวิธีการกำจัดแบบเกาส์	71
3.5.1	การเลือกตัวหลัก	71
3.5.2	การจัดสเกล	73
3.5.3	ระบบสามแถวทแยง	75
3.6	วิธีของเกาส์-จอร์ดอง	77
3.7	วิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน	78
3.8	การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยแม่ทแลบ	80
3.9	วิธีการแยกแบบแอลยู	82
3.10	คำสั่งสำเร็จรูปในแม่ทแลบสำหรับการแยกเมทริกซ์แบบแอลยู	87
3.11	วิธีการแยกแบบไชลสกี	88
3.12	คำสั่งสำเร็จรูปในแม่ทแลบสำหรับการแยกเมทริกซ์แบบไชลสกี	91
3.13	วิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี	92
3.14	วิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล	95
3.15	วิธีการผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง	97
3.16	วิธีคอนจูเกตเกรเดียนต์	99

3.17	บทสรุป	112
	แบบฝึกหัด	113
บทที่ 4	การประมาณค่าในช่วงและนอกช่วง	123
4.1	บทนำ	123
4.2	ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน	125
4.2.1	การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง	125
4.2.2	การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง	126
4.2.3	การประมาณค่าในช่วงเชิงฟังก์ชันพหุนามทั่วไป	128
4.3	ฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์	131
4.3.1	การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง	131
4.3.2	การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง	133
4.3.3	การประมาณค่าในช่วงเชิงฟังก์ชันพหุนามทั่วไป	135
4.4	การประมาณค่าในช่วงด้วยเส้นโค้ง	138
4.4.1	การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง	139
4.4.2	การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง	139
4.4.3	การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสาม	141
4.5	คำสั่งสำเร็จรูปในเมทแลบสำหรับการประมาณภายในช่วง	147
4.6	การประมาณค่านอกช่วง	148
4.7	บทสรุป	150
	แบบฝึกหัด	151
บทที่ 5	การถดถอยแบบกำลังสองน้อยสุด	157
5.1	บทนำ	157
5.2	การถดถอยแบบเชิงเส้น	159
5.3	การประยุกต์การถดถอยแบบเชิงเส้นกับข้อมูลไม่เชิงเส้น	162
5.4	การถดถอยแบบพหุนาม	167
5.5	คำสั่งสำเร็จรูปในเมทแลบสำหรับการถดถอยแบบกำลังสองน้อยสุด	171
5.6	การถดถอยแบบหลายเชิง	172

5.6.1	แบบเชิงเส้น	173
5.6.2	แบบพหุนาม	179
5.7	บทสรุป	181
	แบบฝึกหัด	182

บทที่ 6 การหาค่าอินทิกรัลและค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข 191

6.1	บทนำ	191
6.2	กฎสี่เหลี่ยมคางหมู	193
6.3	กฎสี่เหลี่ยมคางหมูแบบหลายช่วง	199
6.4	กฎของซิมป์สัน	203
6.5	กฎของซิมป์สันแบบหลายช่วง	205
6.6	สูตรอินทิเกรตของนิวตัน-โคตส์	208
6.7	การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ต	212
6.8	การหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์	217
6.9	การอินทิเกรตหลายชั้น	225
6.10	คำสั่งสำเร็จรูปในเมทแลบสำหรับการอินทิเกรต	228
6.11	การหาค่าอนุพันธ์	230
6.12	คำสั่งสำเร็จรูปในเมทแลบสำหรับการหาค่าอนุพันธ์	236
6.13	บทสรุป	237
	แบบฝึกหัด	238

บทที่ 7 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 247

7.1	บทนำ	247
7.2	วิธีของออยเลอร์	250
7.3	วิธีของฮวน	254
7.4	วิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว	258
7.5	วิธีของรุงเง-คุตทา	261
7.5.1	รุงเง-คุตทาอันดับสอง	261
7.5.2	รุงเง-คุตทาอันดับสาม	263
7.5.3	รุงเง-คุตทาอันดับสี่	265

7.6	ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	267
7.7	คำสั่งสำเร็จรูปในเมทแลบสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	273
7.8	วิธีแบบหลายขั้น	275
7.8.1	วิธีของฮวนแบบเริ่มต้นเองไม่ได้	276
7.8.2	วิธีของอาดามส์-แบซฟอร์ท	278
7.8.3	วิธีของอาดามส์-มุลตัน	280
7.9	บทสรุป	282
	แบบฝึกหัด	284
บทที่ 8	การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	293
8.1	บทนำ	293
8.1.1	คำนิยาม	294
8.1.2	ชนิดของสมการ	295
8.1.3	เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น	297
8.2	สมการเอลลิปติก	298
8.2.1	สมการเชิงอนุพันธ์	298
8.2.2	วิธีการแก้	300
8.2.3	ตัวอย่าง	302
8.3	สมการพาราโบลิค	310
8.3.1	สมการเชิงอนุพันธ์	310
8.3.2	วิธีแบบชัดแจ้ง	312
8.3.3	วิธีแบบปริยาย	317
8.3.4	วิธีของเครงก์-นิโคลสัน	320
8.4	สมการไฮเพอร์โบลิค	326
8.4.1	สมการเชิงอนุพันธ์	326
8.4.2	วิธีการแก้	328
8.4.3	ตัวอย่าง	330
8.5	บทสรุป	335
	แบบฝึกหัด	335

ภาคผนวก ก เมทริกซ์	347
ก.1 นิยาม	347
ก.2 การบวกและลบเมทริกซ์	349
ก.3 การคูณเมทริกซ์	349
ก.4 การทำเมทริกซ์สลับเปลี่ยน	350
ก.5 เมทริกซ์ผกผัน	350
ก.6 การแบ่งกันเมทริกซ์	351
ก.7 แคลคูลัสของเมทริกซ์	352
 ภาคผนวก ข พื้นฐานแมทแลบ	 353
ข.1 บทนำ	353
ข.2 องค์ประกอบของโปรแกรมแมทแลบ	353
ข.2.1 หน้าต่างคำสั่ง (Command Window)	354
ข.2.2 หน้าต่างแสดงโฟลเดอร์ปัจจุบัน (Current Folder)	356
ข.2.3 หน้าต่างแก้ไขโปรแกรม (Editor Window)	356
ข.2.4 หน้าต่างแสดงภาพ (Figure Window)	357
ข.2.5 หน้าต่างแสดงพื้นที่ทำงาน (Workspace Window)	358
ข.2.6 หน้าต่างแสดงข้อความช่วยเหลือ (Help Window)	359
ข.3 การกำหนดค่าให้กับตัวแปร	359
ข.3.1 ตัวแปรแบบสเกลาร์	359
ข.3.2 ตัวแปรแบบอาร์เรย์ เวกเตอร์ และเมทริกซ์	360
ข.3.3 การใช้เครื่องหมายโคลอน	362
ข.3.4 รูปแบบการแสดงผลข้อมูลของโปรแกรมแมทแลบ	362
ข.3.5 การพิมพ์คำสั่งต่อเนื่องที่ยาวเกินหนึ่งบรรทัดในโปรแกรมแมทแลบ	363
ข.4 เครื่องหมายทางคณิตศาสตร์	364
ข.5 ฟังก์ชันสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ในโปรแกรมแมทแลบ	365
ข.6 การสร้างกราฟเบื้องต้น	367
ข.7 การเขียนโปรแกรมด้วยแมทแลบ	373
ข.7.1 สคริปต์ไฟล์	373

ข.7.2	ฟังก์ชันไฟล์	373
ข.7.3	การรับข้อมูลจากแป้นพิมพ์และแสดงข้อมูลออกหน้าจอ	374
ข.7.4	การอ่านและเขียนข้อมูลผ่านไฟล์	377
ข.7.5	คำสั่งสำหรับการเขียนโปรแกรมในแมทแลบ	379
ข.7.5.1	คำสั่งที่ใช้สำหรับการตัดสไลด์	379
ข.7.5.2	คำสั่งที่ใช้สำหรับการทำงานซ้ำ ๆ	382
ภาคผนวก ค	การประดิษฐ์สูตรเรียง-คูททาคันดับสี่	385
ภาคผนวก ง	คำสั่งแมทมาทิก้า	389
บรรณานุกรม		401
ครรชนี		403
ประวัติผู้แต่ง		411

บทที่

1

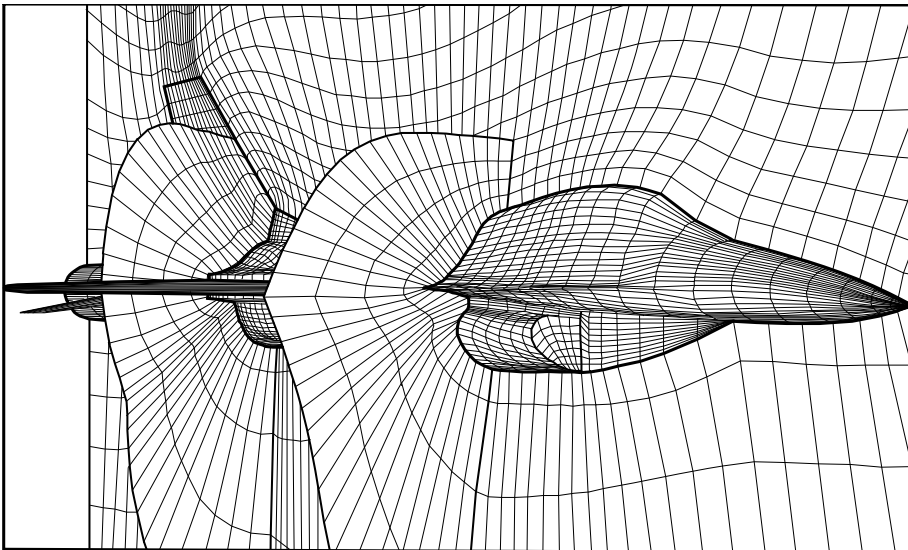
ก้าวแรกสู่

วิธีเชิงตัวเลข

1.1 บทนำ

การศึกษาและการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ ทางสายวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ต้องการความรู้ความเข้าใจในวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ผสมผสานกับความสามารถในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์และความรู้พื้นฐานทางด้านภาษาคอมพิวเตอร์ ความรู้ความสามารถในหลาย ๆ ด้านนี้ กลายเป็นความจำเป็นที่จะนำไปสู่การทำวิจัยค้นคว้าหรือการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนในปัจจุบัน ยกตัวอย่างเช่น การออกแบบรูปร่างภายนอกของลำตัวรถยนต์ อาจทำได้โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) เพื่อคำนวณหาลักษณะสภาวะของอากาศที่ไหลผ่านลำตัวรถ วิธีดังกล่าวสามารถคำนวณเพื่อบ่งบอกแรงดันที่เกิดขึ้นตามตำแหน่งต่าง ๆ ของตัวรถ เพื่อว่าผู้ออกแบบสามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างลำตัวรถให้มีลักษณะที่สวยงาม และในขณะเดียวกัน ทำให้แรงดันจากอากาศเกิดขึ้นน้อยที่สุดเพื่อการประหยัดน้ำมัน การออกแบบเครื่องยนต์ของรถยนต์ก็เช่นกัน อาจใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ซึ่งสามารถทำการวิเคราะห์รูปแบบของเครื่องยนต์ที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่งต่าง ๆ ตลอดจนการขยายตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นตามมาเพื่อป้องกันความเสียหายขณะใช้งาน ทั้งการออกแบบลำตัวรถและเครื่องยนต์ของรถยนต์สามารถทำได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ผู้ออกแบบสามารถทำการคำนวณจนได้ผลลัพธ์ที่ก่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด ก่อนนำแบบที่ได้นั้น ไปสร้างขึ้นเป็นต้นแบบของจริงเพื่อการทดสอบและการรับรองก่อนการผลิตต่อไป

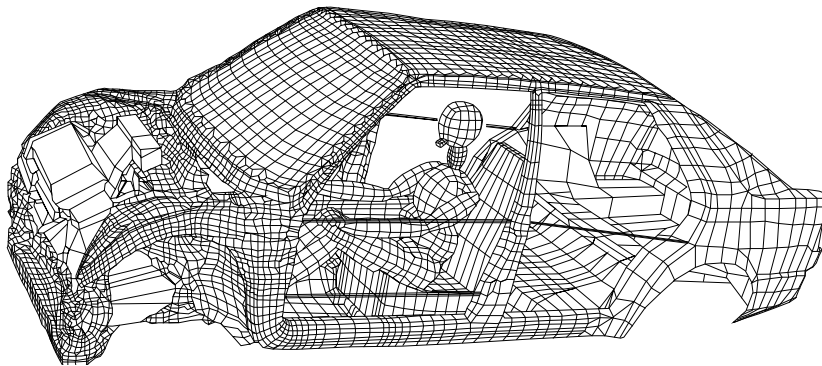
ในการออกแบบลำตัวรถเพื่อหาลักษณะความดันจากอากาศในขณะที่รถเคลื่อนตัว หรือการออกแบบเครื่องยนต์ของรถยนต์เพื่อหาลักษณะการกระจายของอุณหภูมิและความเค้นที่เกิดขึ้นนั้น ไม่สามารถทำได้โดยวิธีทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงเพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) เพราะปัญหาเหล่านี้มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนภายใต้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่มีความซับซ้อนเช่นกัน ดังนั้น วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข เช่น วิธีผลต่างสลับและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จึงมีบทบาทเป็นอย่างมากต่อการออกแบบผลิตภัณฑ์ในปัจจุบัน วิธีเหล่านี้ได้ถูกนำไปประยุกต์เพื่อใช้ในการคำนวณสำหรับงานทางด้านอื่น ๆ อย่างกว้างขวาง เช่น การออกแบบลักษณะลำตัวเครื่องบินเพื่อให้แรงดันจากอากาศนั้นต่ำสุด โดยการคำนวณสภาวะของอากาศรอบตัวเครื่องบิน ด้วยวิธีการผลต่างสลับเนื่อง ดังแสดงในรูป 1.1 การปรับปรุงรูปร่างลำตัวกระสวยอวกาศเพื่อคำนวณหาลักษณะของสภาวะอากาศหลังจากที่ได้ถูกยิงขึ้นและบินเข้าสู่ชั้นบรรยากาศด้วยความเร็วกว่าเสียงหลายเท่า การออกแบบโครงสร้างรถยนต์ซึ่งหากเกิดการชนแล้วโครงสร้างด้านหน้าของรถจะยุบตัวค่อนข้างมาก ในขณะที่โครงสร้างของห้องผู้โดยสารนั้นยุบตัวเพียงเล็กน้อยดังเช่นแสดงในรูป 1.2 การออกแบบโครงสร้างเครื่องบินเพื่อให้มีน้ำหนักเบาแต่มีความแข็งแรงสูง การออกแบบสถานีอวกาศขนาดใหญ่ที่ไม่สามารถทดลองได้จริงบนพื้นโลก รวมไปถึงการคำนวณสภาวะอากาศบนพื้นโลกเพื่อทำนายทิศทางของพายุและเตือนให้ประชาชนอพยพหนีภัยก่อนพายุจริงจะมาถึง



รูป 1.1 การใช้วิธีผลต่างสลับเนื่องเพื่อคำนวณสภาวะอากาศผ่านลำตัวเครื่องบิน

วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ปัญหาเหล่านี้ก่อให้เกิดประโยชน์เป็นอย่างมากต่อนักออกแบบ วิศวกร และนักวิทยาศาสตร์ในปัจจุบัน อย่างไรก็ตาม ผู้วิเคราะห์จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานของวิธีเหล่านี้ก่อนนำไปประยุกต์ใช้ ทั้งวิธีผลต่างสลับเนื่องและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ตลอดจนวิธีอื่น ๆ ที่

เกี่ยวข้องกับการคำนวณซึ่งไม่ได้อ้างถึงในที่นี้ เป็นวิธีที่ไม่ยากแก่การทำความเข้าใจ หากแต่ต้องการความรู้พื้นฐานในการเรียนรู้ถึงวิธีเชิงตัวเลข หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ก่อนที่ผู้ศึกษาจะเรียนรู้วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น จำเป็นต้องมีความเข้าใจวิธีเชิงตัวเลขมาก่อน ซึ่งในปัจจุบันวิชาวิธีเชิงตัวเลขได้ถูกบรรจุเป็นวิชาในการศึกษาระดับปริญญาบัณฑิตของการเรียนสายวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และศาสตร์ด้านอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ



รูป 1.2 การใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณการยุบตัว
ของโครงสร้างรถยนต์ขณะเกิดการชน

1.2 วิธีเชิงตัวเลขคืออะไร

ชื่อของวิชาวิธีเชิงตัวเลขมักทำให้ผู้ที่ต้องการศึกษาเกิดความวิตกว่าวิชานี้ทำความเข้าใจได้ลำบาก และยิ่งไปกว่านั้นชื่อของวิชานี้ยังบ่งบอกเป็นนัยอีกว่ามีความเกี่ยวข้องพัวพันกับการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ทำให้ผู้ศึกษาโดยเฉพาะผู้ที่ไม่เคยชินกับการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์มาก่อนเกิดความวิตกกังวลเพิ่มมากขึ้น ในเนื้อหาโดยแท้จริงแล้ววิธีเชิงตัวเลขเป็นเพียงกลุ่มของวิธีย่อย ๆ ที่ประกอบขึ้นอย่างเป็นขั้นเป็นตอน โดยแต่ละวิธีนั้นเหมาะสมกับการนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีลักษณะโดยจำเพาะในตัวเองซึ่งอาจแตกต่างกันออกไป หรืออาจกล่าวให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นไปอีกระดับหนึ่งก็คือ วิชาวิธีเชิงตัวเลขนั้นเปรียบเสมือนตำราทำกับข้าว (cookbook) ซึ่งมีขั้นตอนกฎเกณฑ์ที่ค่อนข้างแน่นอน ลักษณะพิเศษของวิธีเชิงตัวเลขเป็นวิธีของการดำเนินการทางเลขคณิต (arithmetic operations) แบบง่าย ๆ อันประกอบด้วย การบวก ลบ คูณ หารเป็นหลัก โดยมีการใช้เหตุใช้ผลตามหลักตรรกวิทยา (logic) รวมประกอบด้วย

จากคำอธิบายในภาพรวมของวิธีเชิงตัวเลขข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่าแนวความคิดของวิธีเชิงตัวเลขนี้ไม่ได้เป็นศาสตร์ใหม่เลย วิธีต่าง ๆ หลายวิธีได้ถูกคิดค้นกันขึ้นมาเป็นเวลานานแล้ว หากแต่ถ้าไม่สามารถนำมาใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ จนกระทั่งถึงการถือกำเนิดของคอมพิวเตอร์เชิงตัวเลข (digital computer) ทำให้วิธีเชิงตัวเลขสามารถนำมาใช้กันได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น สามารถแก้ปัญหามากใหญ่ได้ภายในระยะเวลาอันสั้น รวมไปถึงปัญหาอื่น ๆ อีกเป็นจำนวนมากที่ไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้ด้วยวิธีคณิตศาสตร์แผนเดิม (classical mathematics) การผสมผสานเข้าด้วยกันระหว่างวิธีเชิงตัวเลขและ

คอมพิวเตอร์ ก่อให้เกิดผลประโยชน์อย่างมากที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้โดยง่ายก่อให้เกิดผลลัพธ์อย่างรวดเร็ว ทำให้วิธีนี้ได้รับความนิยมและกลายเป็นรากฐานเพื่อใช้ศึกษาวิธีอื่น ๆ ที่อยู่ในระดับสูงขึ้นไป

อย่างไรก็ตาม การผสมผสานกันระหว่างวิธีเชิงตัวเลขกับเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อการแก้ปัญหาในบางกรณีก็ยังคงมีขีดจำกัด เนื่องจากมีปัญหาอีกจำนวนหนึ่งที่วิธีเชิงตัวเลขยังไม่สามารถหาผลลัพธ์ให้ได้ เช่น การจำลองสภาวะการเผาไหม้โดยสมบูรณ์ภายในเครื่องยนต์ไอพ่นสมัยใหม่ (scramjet) ของเครื่องบินที่ต้องการออกแบบเพื่อให้บินเร็วกว่าเสียงหลาย ๆ เท่า ในขณะที่เดียวกันก็มีปัญหาอีกจำนวนไม่น้อยที่วิธีเชิงตัวเลขสามารถนำไปใช้เพื่อหาผลลัพธ์ได้หากแต่วิวัฒนาการทางคอมพิวเตอร์ยังไม่ถึงซึ่งอาจเป็นผลมาจากปริมาณหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์นั้นไม่เพียงพอสำหรับการแก้ปัญหาที่มีขนาดใหญ่เกินไป หรือเวลาที่จำเป็นต้องใช้เพื่อการคำนวณนั้นมากจนเกินไปทำให้เสียค่าใช้จ่ายจนไม่คุ้มทุนในทางปฏิบัติ

1.3 ความสำคัญของการศึกษาวิธีเชิงตัวเลข

ในหัวข้อย่อนี้เราจะมาศึกษาตัวอย่างง่าย ๆ ตัวอย่างหนึ่งเพื่อจะแสดงให้เห็นประโยชน์ของการศึกษาวิธีเชิงตัวเลข จากตัวอย่างนี้เราจะพบว่าวิธีเชิงตัวเลขนั้นง่ายแก่การทำความเข้าใจ อย่างไรก็ตามจุดประสงค์หลักของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะอธิบายขั้นตอนของวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์แล้ว จะพยายามเน้นการอธิบายสมการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ นั้นด้วย เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงความหมายทางกายภาพ (physical meaning) อันจะเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการใช้วิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์ปัญหาขั้นสูงต่อไป ทั้งนี้ก็เพราะว่า การเข้าใจความหมายทางกายภาพของปัญหา จะช่วยทำให้เราเลือกวิธีเชิงตัวเลขที่เหมาะสมกับปัญหานั้น ๆ ได้ดีที่สุด ยิ่งไปกว่านั้น ความเข้าใจในวิธีเชิงตัวเลข (ซึ่งมีหลาย ๆ รูปแบบที่เราจะศึกษาในบทต่าง ๆ กันต่อไป) โดยถ่องแท้ จะช่วยทำให้เราสามารถวิเคราะห์ปัญหานั้น ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ในปัจจุบันถึงแม้จะมีโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้โดยตรง แต่หากผู้วิเคราะห์ปัญหาไม่มีความรู้พื้นฐานในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านั้น อาจไม่สามารถเลือกใช้โปรแกรมซึ่งเหมาะสมที่สุดกับปัญหานั้นได้อย่างถูกต้อง ทั้งนี้สืบเนื่องมาจากหลักความจริงที่ว่า

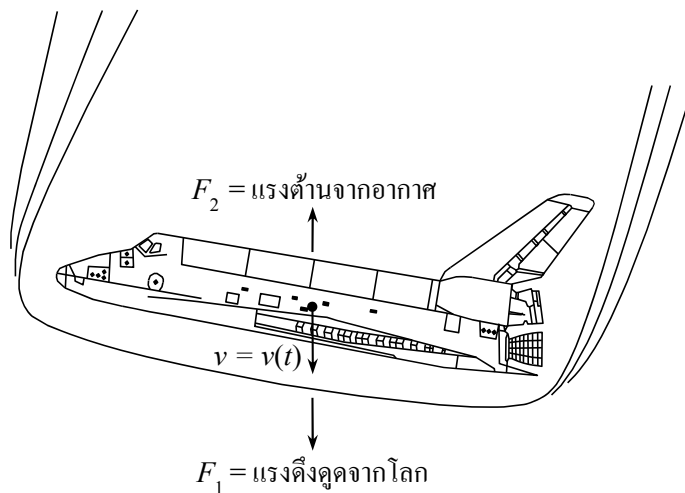
- (ก) ไม่มีวิธีเชิงตัวเลขเพียงวิธีใดวิธีหนึ่งที่สามารถแก้ปัญหาได้ทุกชนิด
- (ข) ไม่มีวิธีเชิงตัวเลขวิธีใดที่จะไม่ก่อให้เกิดค่าผิดพลาด (error) ของผลลัพธ์ที่คำนวณได้
- (ค) ไม่มีวิธีเชิงตัวเลขวิธีใดที่ดีที่สุดสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาในทุกกรณี

จากหลักความจริงดังกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่า ความเข้าใจในพื้นฐานของวิธีเชิงตัวเลขนั้น มีความจำเป็นอย่างยิ่งในการวิเคราะห์ปัญหาทั่วไปทางสายวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ยิ่งไปกว่านั้น ในขณะที่วิวัฒนาการทางด้านการคำนวณยังพัฒนาขึ้นไปดังเช่นในปัจจุบันนี้ พื้นฐานความเข้าใจในวิธีเชิงตัวเลขจึงเปรียบเสมือนรากฐานที่สำคัญเพื่อเสริมความสามารถในการคำนวณสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่

มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป ดังเช่นปัญหาการคำนวณสภาวะการไหลของอากาศผ่านเครื่องบินหรือการยุบตัวของโครงสร้างรถยนต์ในขณะเกิดการชน ดังที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้

เพื่อแสดงให้เห็นว่าวิธีเชิงตัวเลขนั้นเป็นวิธีที่ไม่ยากแก่การทำความเข้าใจ และสามารถนำมาใช้เพื่อการคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณสำหรับบางปัญหาได้อย่างรวดเร็วเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีทางคณิตศาสตร์แผนเดิม เราจะมาศึกษาตัวอย่างง่าย ๆ ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1 ในขณะที่กระสวยอวกาศ (Space Shuttle) ดับเครื่องยนต์และร่อนจากวงโคจรกลับสู่พื้นโลกด้วยความเร็วกว่าเสียงหลายเท่านั้น การเสียดสีในชั้นบรรยากาศก่อให้เกิดความร้อนสูงที่ผิวได้ห้องยานปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นจะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความเร็วของกระสวยอวกาศในขณะที่ยังตัวลงมา ปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นอาจคำนวณได้จากความรู้ทางด้านพลศาสตร์ของไหลซึ่งสามารถนำไปใช้ในการออกแบบความหนาของฉนวนป้องกันความร้อนได้ห้องยานได้ ความเร็วของกระสวยอวกาศซึ่งแปรผันกับเวลาที่ผ่านไปอาจคำนวณโดยประมาณได้จากกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) โดยแรงที่กระทำต่อกระสวยอวกาศประกอบด้วยแรงดึงดูดจากโลกและแรงต้านจากการเสียดสีกับอากาศ ดังแสดงในรูป 1.3



รูป 1.3 แรงที่กระทำต่อกระสวยอวกาศขณะร่อนลงสู่พื้นโลก

วิธีทำ จากกฎข้อที่สองของนิวตันซึ่งกล่าวว่าแรงนั้นแปรผันกับมวลและความเร่ง ดังนี้

$$F = ma \quad (1.1)$$

โดย F แทนแรงสุทธิ (net force) ซึ่งหากกำหนดทิศทางดึงดูดสู่พื้นโลกเป็นบวก แรงนี้ก็คือ

$$F = F_1 - F_2 \quad (1.2)$$

ซึ่ง F_1 เป็นแรงดึงดูดจากโลก

$$F_1 = mg \quad (1.3)$$

โดย m แทนมวล (mass) ของกระสวยอวกาศ และ g แทนค่าของความเร่งจากแรงโน้มถ่วง (gravitational constant) แรง F_2 เป็นแรงต้านจากอากาศซึ่งอาจสมมติให้แปรผันโดยตรงกับความเร็ว v กล่าวคือ ยิ่งความเร็วสูง แรงต้านนี้จะเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย

$$F_2 = cv \quad (1.4)$$

โดย c แทนสัมประสิทธิ์ของแรงต้าน (drag coefficient) ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างของวัตถุที่เคลื่อนที่ในอากาศ รวมไปถึงลักษณะของผิววัตถุที่ว่าเรียบหรือขรุขระเพียงใด เมื่อแทนสมการ (1.3) และ (1.4) ลงในสมการ (1.2) ทำให้สมการ (1.1) กลายเป็น

$$mg - cv = ma$$

แต่เนื่องจากความเร่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วกับเวลา ดังนั้น

$$mg - cv = m \frac{dv}{dt}$$

ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น (linear ordinary differential equation) ในรูปแบบ ดังนี้

$$\frac{dv}{dt} + \frac{c}{m}v = g \quad (1.5)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ (1.5) นี้ จำเป็นต้องแก้เพื่อหาผลลัพธ์ของความเร็ว v ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา t ที่เปลี่ยนแปลงไป

ในการหาความเร็ว v นี้ สามารถทำได้โดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.5) ได้ 2 วิธี ดังนี้

- (ก) ด้วยวิธีคณิตศาสตร์แม่นยำซึ่งให้ผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution)
- (ข) ด้วยวิธีเชิงตัวเลขซึ่งให้ผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution)

เราสามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงโดยเริ่มจากการย้ายข้างแล้วจัดรูปแบบสมการ (1.5) ใหม่

ดังนี้

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

จากนั้นจึงแยกตัวแปรต้น (independent variable) t และตัวแปรตาม (dependent variable) v ให้อยู่คนละด้านของสมการ แล้วจึงทำการอินทิเกรต (integrate) ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\int \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v} = \int dt \quad (1.6)$$

ก่อให้เกิดผลจากการอินทิเกรต คือ

$$-\frac{m}{c} \ln \left(g - \frac{c}{m}v \right) = t + A \quad (1.7)$$

โดย A แทนค่าคงตัวจากการอินทิเกรต (integrating constant) ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) เช่น หากเรากำหนดว่า เมื่อเวลา $t = 0$ นั้น ความเร็ว $v = 0$ แล้วแทนลงในสมการ (1.7) จะได้ว่า

$$A = -\frac{m}{c} \ln g \quad (1.8)$$

แทนค่า A ที่ได้จากสมการ (1.8) ลงในสมการ (1.7) จะได้

$$\begin{aligned} -\frac{m}{c} \ln\left(g - \frac{c}{m}v\right) &= t - \frac{m}{c} \ln g \\ \frac{m}{c} \ln\left(g - \frac{c}{m}v\right) - \frac{m}{c} \ln g &= -t \\ \ln\left(1 - \frac{c}{mg}v\right) &= -\frac{c}{m}t \\ 1 - \frac{c}{mg}v &= e^{-\frac{c}{m}t} \\ \frac{c}{mg}v &= 1 - e^{-\frac{c}{m}t} \\ v &= \frac{mg}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

ผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในสมการ (1.9) แสดงให้เห็นว่า เมื่อเวลาเริ่มต้น $t=0$ นั้น ความเร็ว v ของกระสวยอวกาศมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดมาให้ เมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น ความเร็วก็จะเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน จนกระทั่งเมื่อเวลาผ่านไปนานความเร็วจะมีค่าเข้าสู่ (approach) ค่าคงที่ค่าหนึ่ง นั่นคือ

$$v(t \rightarrow \infty) = \frac{mg}{c} \quad (1.10)$$

ซึ่งมีความหมายว่า แรงต้านจากอากาศ F_2 ในเวลานั้นมีค่าเท่ากับแรงดึงดูด F_1 จากโลก

หากเราลองกำหนดตัวเลขสำหรับค่าต่าง ๆ ในสมการ (1.9) เช่น กำหนดให้

$$\begin{aligned} \text{มวลของกระสวยอวกาศ} \quad m &= 90,000 \quad \text{kg} \\ \text{ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้าน} \quad c &= 450 \quad \text{kg/sec} \\ \text{ค่าความเร่งจากแรงโน้มถ่วง} \quad g &= 9.8 \quad \text{m/sec}^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

แล้วแทนลงในสมการ (1.9) จะได้ความเร็วของกระสวยอวกาศซึ่งแปรผันกับเวลา ดังนี้

$$v(t) = 1,960(1 - e^{-0.005t}) \quad (1.12)$$

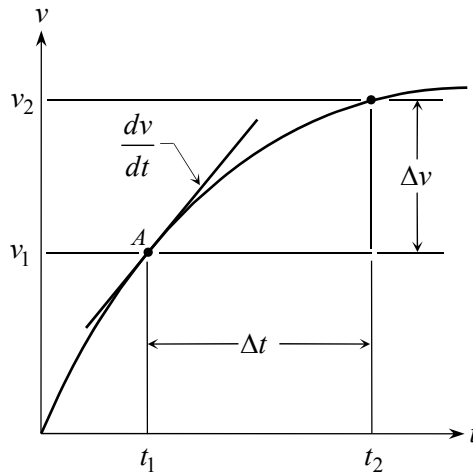
ผลเฉลยของความเร็วที่เวลาต่าง ๆ กันได้แสดงในตาราง 1.1

แทนที่จะหาผลเฉลยแม่นยำ เราอาจหาผลเฉลยโดยประมาณด้วยการใช้วิธีเชิงตัวเลขได้โดยง่ายดังต่อไปนี้ หากเราพิจารณาสมการอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น (1.5) จะเห็นว่า ค่าที่จำเป็นต้องหา คือ ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว dv/dt ซึ่งสามารถหาได้จากการประมาณด้วยการพิจารณากกราฟการเปลี่ยนแปลงของความเร็วกับเวลา ดังแสดงในรูป 1.4 ที่จุด A อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว dv/dt ซึ่งก็คือความชัน (slope) อาจประมาณค่าได้โดย

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (1.13)$$

ตาราง 1.1 ผลเฉลยแม่นยำของตรงความเร็วของกระสวยอวกาศจากสมการ (1.12) ที่เวลาต่างกัน

เวลา t , sec	ความเร็ว v , m/sec
0	0
30	273
60	508
90	710
120	884
150	1,034
180	1,163
⋮	⋮
∞	1,960



รูป 1.4 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วกับเวลา

ซึ่งหาก $\Delta t \rightarrow 0$ แล้ว $\Delta v / \Delta t \rightarrow dv/dt$ นั้นหมายความว่า การประมาณค่าดังกล่าวจะเที่ยงตรงมากขึ้น หาก Δt ที่ใช้มีค่าน้อย ค่า Δt นี้เรียกกันโดยทั่วไปว่าเป็นค่าช่วงเวลา (time step) ของการคำนวณ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ (1.5) อาจเขียนให้อยู่ในรูปแบบโดยประมาณได้ ดังนี้

$$\frac{v_2 - v_1}{\Delta t} + \frac{c}{m} v_1 = g$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปโดย $i = 1, 2, 3, \dots$ ได้คือ

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} + \frac{c}{m} v_i = g \quad (1.14)$$

ซึ่งหลังจากทำการจัดพจน์ต่าง ๆ จะได้

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t \left(g - \frac{c}{m} v_i \right) \quad (1.15)$$

และหากเราใช้ค่าของมวล m , สัมประสิทธิ์ของแรงต้าน c และความเร่งจากแรงโน้มถ่วง g ดังที่กำหนดไว้ในสมการ (1.11) แทนลงในสมการ (1.15) นี้ จะได้

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t (9.8 - 0.005v_i) \quad (1.16)$$

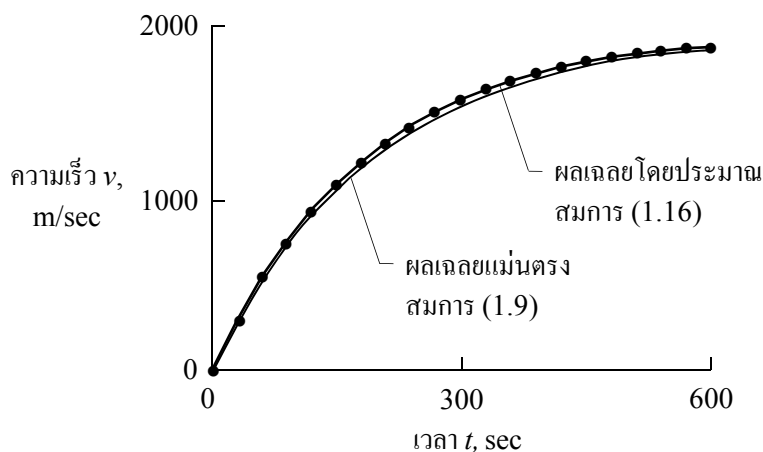
สมการ (1.16) ที่ได้นี้บ่งบอกว่า หากเรากำหนดค่าช่วงเวลา Δt และรู้ความเร็วที่ i เราก็สามารถคำนวณความเร็วที่ $i+1$ ได้โดยตรง สมมติว่าเราใช้ช่วงเวลา $\Delta t = 30$ sec และเรารู้ความเร็วเริ่มต้นซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ สมการ (1.16) จะให้ผลลัพธ์ดังแสดงในตาราง 1.2 ผลลัพธ์ที่คำนวณได้นี้ได้นำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากสมการ (1.12) ด้วยเช่นกัน

ตาราง 1.2 ผลเฉลยโดยประมาณของความเร็วของกระสวยอวกาศจากสมการ (1.16)

โดยใช้ $\Delta t = 30$ sec เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง

i	$i+1$	t, sec	$v, \text{m/sec}$	
			ผลเฉลยโดยประมาณ (1.16)	ผลเฉลยแม่นยำตรง (1.12)
0	1	30	294	273
1	2	60	544	508
2	3	90	756	710
3	4	120	937	884
4	5	150	1,090	1,034
5	6	180	1,221	1,163
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
49	50	1,500	1,959	1,959

ผลเฉลยโดยประมาณและผลเฉลยแม่นยำตรงของความเร็วดังแสดงในตาราง 1.2 สามารถนำมาเปรียบเทียบได้ดังแสดงในรูป 1.5



รูป 1.5 การเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยโดยประมาณและผลเฉลยแม่นยำตรง
ของความเร็วของกระสวยอวกาศ

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ถึงแม้ผลเฉลยโดยประมาณจะให้ค่าที่แตกต่างออกไปจากผลเฉลยแม่นยำตรงบ้างก็ตาม แต่ก็ยังสามารถให้ภาพพจน์ของปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นได้ในรูปแบบที่คล้ายคลึงกันซึ่งเป็นประโยชน์ต่อผู้

วิเคราะห์ ประโยชน์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากการใช้วิธีเชิงตัวเลขซึ่งให้ผลเฉลยโดยประมาณในตัวอย่างนี้ สามารถสรุปให้มีความชัดเจนได้ดังนี้

(ก) สมการ (1.15) ที่สร้างขึ้นโดยวิธีเชิงตัวเลขจากสมการเชิงอนุพันธ์ (1.5) นั้นทำให้สะดวกเมื่อเปรียบเทียบกับ การหาผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในสมการ (1.12) ซึ่งต้องผ่านขั้นตอนของการอินทิเกรตและการจัดพจน์ต่าง ๆ ที่ต้องทำอย่างระมัดระวัง

(ข) ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากวิธีเชิงตัวเลขดังแสดงในสมการ (1.16) สามารถนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (ดังแสดงในรูป 1.6) ได้โดยง่าย โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์มีขนาดสั้น ๆ ที่สามารถคำนวณให้ผลลัพธ์ได้อย่างรวดเร็ว

(ค) หากต้องการให้ผลเฉลยโดยประมาณมีความแม่นยำมากขึ้น ผู้วิเคราะห์เพียงลดช่วงเวลา Δt ให้มีค่าต่ำลง ซึ่งสามารถทำได้ง่ายโดยแก้ไขโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

(ง) หากปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ยกตัวอย่างเช่น หากแรงต้านอากาศ F_2 ไม่แปรผันในเชิงเส้นตรงกับความเร็ว ดังเช่นแสดงในสมการ (1.4) แต่อยู่ในรูปแบบอื่น เช่น

$$F_2 = cv^{3/2} \quad (1.17)$$

นำไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น (nonlinear ordinary differential equation) ในรูปแบบดังนี้

$$\frac{dv}{dt} + \left(\frac{c}{m} \sqrt{v} \right) v = g \quad (1.18)$$

ในกรณีเช่นนี้ ผลเฉลยแม่นยำตรงอาจหาไม่ได้ง่าย แต่ขั้นตอนของวิธีเชิงตัวเลขดังที่ได้อธิบายไว้ยังคงประยุกต์ใช้ได้เช่นเดิม

จากเหตุผลข้อดีและความสะดวกในการใช้งานทำให้วิธีเชิงตัวเลขได้รับความนิยม วิศวกรและนักวิทยาศาสตร์สามารถนำความรู้พื้นฐานของวิธีเช่นนี้ไปวิเคราะห์ปัญหาเฉพาะหน้าได้ง่ายและรวดเร็ว โดยเฉพาะหากมีเครื่องคอมพิวเตอร์และความรู้ทางด้านภาษาคอมพิวเตอร์อยู่บ้าง ดังที่จะอธิบายในหัวข้อต่อไป

1.4 คอมพิวเตอร์

การศึกษาวิธีเชิงตัวเลขนั้นประกอบด้วย 2 ส่วนประกอบที่สำคัญ ส่วนประกอบแรกคือ เนื้อหาขั้นตอนของวิธีแบบต่าง ๆ ที่ต้องศึกษาทำความเข้าใจ และส่วนประกอบที่สองก็คือ ความสามารถในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ รวมทั้งความเข้าใจในการใช้ภาษาคอมพิวเตอร์เพื่อเปลี่ยนขั้นตอนของวิธีแบบต่าง ๆ นั้นออกมาเป็นตัวเลข ความสามารถในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์และการใช้ภาษาคอมพิวเตอร์ได้อย่างดีนั้น อาจกล่าวได้ว่าขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของผู้ใช้เกือบทั้งหมด กล่าวคือ ยังมีโอกาสได้ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ต่างชนิดกันมากเท่าใดและยังได้ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นมากเพียงใด ก็จะมี ความสามารถและประสบการณ์มากขึ้นเพียงนั้น ประสบการณ์ดังกล่าวเป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่งเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาทางด้านเชิงเลขขั้นสูงที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป