

Calculus & Differential Equations with **MATLAB**



แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยแมทแลบ

แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์

ด้วยแมทแลบ

แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ ด้วยแมทแลบ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยเมทแลบ / ปราโมทย์ เดชะอำไพ

1. แคลคูลัส. 2. สมการเชิงอนุพันธ์. 3. เมทแลบ.

515

ISBN 978-974-03-3904-5

สพจ. 1661/2



assคณค่าวิชาการ สู้สังคม
Knowledge to All
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่ผู้เดียว
การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น
ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดพิมพ์โดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2555

พิมพ์ครั้งที่ 2 จำนวน 500 เล่ม พ.ศ. 2563

ผู้จัดจำหน่าย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา ศาลาพระเกี้ยว โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495

ม.นเรศวร จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239

โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023

ม.พะเยา จ.พะเยา โทร. 0-5446-6799-800 โทรสาร 0-5446-6798

จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304

หัวหมาก โทร. 0-2374-1378 โทรสาร 0-2374-1377

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน จ.นครราชสีมา โทร. 0-4492-2662-3 โทรสาร 0-4492-2664

Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com> และเครือข่ายฯ

ร้านค้าติดต่อ แผนกขายส่ง สาขาหัวหมาก โทร. 0-2374-1375-6 โทรสาร 0-2374-1375

กองบรรณาธิการ : ทัศนีย์ ผิวขำ

พิสูจน์อักษร : สำเนา บัวแย้ม

ออกแบบปกและรูปเล่ม : ไกรอัมพร พงษ์จักร

พิมพ์ที่ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย [CUB6302-018] โทร. 0-2218-3562-3 โทรสาร 0-2218-3547

www.cupress.chula.ac.th

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 2

แมทแลบ (MATLAB) ได้ถูกนำมาใช้เพื่อช่วยทำให้การเรียนการสอนวิชาต่าง ๆ สะดวกขึ้นมาก จุดเด่นของแมทแลบคือศักยภาพในการจัดการกับคณิตศาสตร์และการคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพ ช่วยยกระดับความเข้าใจในการศึกษาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ในปัจจุบันเป็นอย่างมาก

หลังจากการจัดพิมพ์ครั้งแรก หนังสือเล่มนี้ได้ถูกแปลเป็นภาษาอังกฤษและได้รับการตอบรับอย่างดีในระดับสากล เพราะประกอบด้วยเนื้อหาที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจและตัวอย่างเป็นจำนวนมาก

ผู้เขียนขอขอบคุณสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนจัดพิมพ์เผยแพร่ เพื่อช่วยยกระดับความรู้พื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์และการคำนวณแก่เยาวชนไทย

ปราโมทย์ เคชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 1

เป้าหมายหลักของการแต่งหนังสือ “แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยแมทแลบ” คือการช่วยผลักดันให้นิสิตนักศึกษาได้เข้าใจในความสำคัญของคณิตศาสตร์แขนงนี้ เพราะเป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการทำความเข้าใจในวิทยาศาสตร์และการวิเคราะห์งานทางวิศวกรรมศาสตร์ในระดับสูงขึ้นไป วิชาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์จึงเป็นวิชาบังคับของการเรียนในระดับอุดมศึกษาโดยเฉพาะทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

อย่างไรก็ตาม วิชาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์กลับกลายเป็นเสมือนยาขมสำหรับผู้ศึกษาเป็นส่วนใหญ่เพราะต้องจดจำสูตร สมการ และกระบวนการหาผลลัพธ์ที่มีความจำเพาะ และที่สำคัญที่สุดก็คือไม่ทราบโดยชัดเจนว่าจะนำไปใช้ทำอะไรได้บ้าง เพราะต้องหมกมุ่นกับกระบวนการจดจำข้างต้นจนลืมภาพรวมใหญ่ของความสำเร็จและจำเป็นในการศึกษาวิชาเช่นนี้ไปเกือบสิ้นเชิง

ความเจริญก้าวหน้าด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีในปัจจุบันเป็นไปอย่างรวดเร็วด้วยซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ ซอฟต์แวร์เหล่านี้ล้วนมีราคาสูงและตั้งอยู่บนองค์ความรู้ของคณิตศาสตร์ซึ่งผู้ใช้อำนาจจำเป็นต้องมีความรู้ความเข้าใจในพื้นฐานของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์มาก่อน หากผู้ใช้อย่างไรก็ตามไม่มีความรู้ความเข้าใจในวิชาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เหล่านี้แล้วจะไม่สามารถใช้ซอฟต์แวร์ได้อย่างถูกต้อง ทำให้ประสิทธิภาพการแข่งขันทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีของประเทศลดลง

ซอฟต์แวร์เหล่านี้ใช้ศักยภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ในการบวก ลบ คูณ หาร ตัวเลขที่สามารถทำได้อย่างรวดเร็วผสมผสานกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งตั้งอยู่บนกระบวนการของคณิตศาสตร์การคำนวณอีกต่อหนึ่ง ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่เป็นตัวเลขเพื่อพล็อตขึ้นเป็นกราฟต่าง ๆ บนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ทำให้ผู้ใช้ซอฟต์แวร์เข้าใจในปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหานั้น ๆ ได้โดยชัดเจนในระยะเวลาอันสั้น

ในปัจจุบัน ซอฟต์แวร์ที่จัดการกับสัญลักษณ์ได้รับการพัฒนาให้มีศักยภาพสูงขึ้นมาก ซอฟต์แวร์แมทแลบ (MATLAB) เป็นซอฟต์แวร์ที่ได้รับความนิยมเพราะสามารถจัดการ

กับทั้งตัวเลขและสัญลักษณ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทำให้การใช้ซอฟต์แวร์แมทแลบกลายเป็นวิชาบังคับในการเรียนสายวิศวกรรมศาสตร์ตามมหาวิทยาลัยต่าง ๆ ในต่างประเทศ

หนังสือเล่มนี้จึงเน้นการใช้ซอฟต์แวร์แมทแลบเพื่อแก้ปัญหาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ หากปัญหานั้นมีผลเฉลยแน่นอนตรงหนังสือเล่มนี้ก็จะทบทวนกระบวนการหาผลเฉลยแน่นอนตรงนั้นดังที่เคยเรียนกันมาแล้วในชั้นเรียนก่อนใช้คำสั่งในแมทแลบเพื่อหาผลลัพธ์เดียวกัน ผลเฉลยแน่นอนตรงที่เกิดขึ้นนี้อยู่ในรูปแบบของสัญลักษณ์ เช่น ตัว x, y ทางคณิตศาสตร์ที่บางครั้งทำให้เกิดความประหลาดใจว่าแมทแลบสามารถหาผลลัพธ์เช่นนี้ได้ในเวลาอันสั้นเมื่อเปรียบเทียบกับการทำงานด้วยตนเองซึ่งต้องใช้เวลานานมากทีเดียว

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นยังสามารถนำมาพล็อตได้โดยสะดวก ประโยชน์ของซอฟต์แวร์เช่นนี้จึงช่วยให้ผู้ศึกษามีเวลาในการทำความเข้าใจผลลัพธ์ซึ่งบ่งบอกปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในปัญหานั้น ช่วยทำให้ผู้ศึกษาเกิดมุมมองของการศึกษาวิชาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ไปอีกด้านหนึ่งว่าเป็นวิชาที่มีประโยชน์ต่อการสร้างเทคโนโลยีใหม่ ๆ ในอนาคต ไม่มองวิชาเช่นนี้ว่าเป็นวิชาที่น่าเบื่อหน่าย ต้องใช้การจดจำ และไม่รู้ว่าจะนำไปใช้ประโยชน์อย่างไรได้บ้าง ดังเช่นที่อาจเกิดขึ้นในอดีต

ผู้เขียนขอขอบคุณจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย สำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา ศูนย์เทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ รวมไปถึงนายวรุตม์ เอ็ดเวิร์ด เศรษฐอำไพ นางสาวปฐมาธิกา แอนนา เศรษฐอำไพ นายพิชเชนทร์ โพธิคุณ นายชัชวาล ศิริปรุ และนายณัฐชนนท์ ประสมสุข ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้อง และนางสาวไกรอัมพร พงษ์จรร ผู้จัดพิมพ์เนื้อหา ผู้เขียนขอขอบคุณ TechSource Systems (Thailand) Co., Ltd. ตัวแทนจำหน่าย MATLAB ในประเทศไทย และขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนในการจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้เพื่อก่อให้เกิดประโยชน์แก่นิสิตนักศึกษาไทยและผู้สนใจทั่วไป

ปราโมทย์ เศรษฐอำไพ
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 2

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 1

บทที่ 1	คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ด้วยซอฟต์แวร์	1
1.1	บทนำ	1
1.2	การแก้สมการคณิตศาสตร์ด้วยซอฟต์แวร์	3
1.3	ความเป็นมาและศักยภาพของเมทแลบ	6
1.4	พื้นฐานเมทแลบที่จำเป็น	7
1.5	บทสรุป	12
	แบบฝึกหัด	13
บทที่ 2	แคลคูลัส	19
2.1	บทนำ	19
2.2	การหาค่าลิมิต	19
2.3	การหาค่าอนุพันธ์	25
2.4	การอินทิเกรต	34
2.5	อนุกรมเทย์เลอร์	41
2.6	อนุกรมทั่วไป	46
2.7	บทสรุป	48
	แบบฝึกหัด	49
บทที่ 3	สมการเชิงอนุพันธ์	55
3.1	บทนำ	55
3.2	ลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์	56
3.3	ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์	58

3.4	บทสรุป	68
	แบบฝึกหัด	68
บทที่ 4	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	77
4.1	บทนำ	77
4.2	สมการแบบแยกได้	78
4.3	สมการเชิงเส้น	86
4.4	สมการแม่นตรง	93
4.5	สมการรูปแบบจำเพาะ เบอร์นูลลี และริคคาตี	105
4.6	ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	112
4.7	บทสรุป	118
	แบบฝึกหัด	119
บทที่ 5	สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง	129
5.1	บทนำ	129
5.2	สมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	130
5.3	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน	133
5.4	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน	137
5.5	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าคอนจูเกตเชิงซ้อน	143
5.6	สมการไม่เอกพันธ์	150
5.7	วิธีหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่รู้ค่า	153
5.8	วิธีแปรผันพารามิเตอร์	159
5.9	ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	167
5.10	บทสรุป	174
	แบบฝึกหัด	175

บทที่ 6	สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูงขึ้นไป	185
6.1	บทนำ	185
6.2	สมการเอกพันธ์ที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	186
6.3	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน	189
6.4	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน	192
6.5	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าคอนจูเกตเชิงซ้อน	196
6.6	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าผสม	199
6.7	สมการไม่เอกพันธ์	201
6.8	ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	208
6.9	บทสรุป	214
	แบบฝึกหัด	215
บทที่ 7	การแปลงลาปลาซ	225
7.1	บทนำ	225
7.2	สมการพื้นฐาน	226
7.3	การแปลงลาปลาซ	229
7.4	การแปลงลาปลาซผกผัน	232
7.5	การแก้สมการเชิงอนุพันธ์	237
7.6	บทสรุป	255
	แบบฝึกหัด	255
บทที่ 8	การแปลงฟูรีเยร์	261
8.1	บทนำ	261
8.2	สมการพื้นฐาน	262
8.3	การแปลงฟูรีเยร์	265
8.4	การแปลงฟูรีเยร์ผกผัน	270

8.5	การแปลงฟูริเยร์แบบเร็ว	274
8.6	การแก้สมการเชิงอนุพันธ์	278
8.7	บทสรุป	281
	แบบฝึกหัด	282
บทที่ 9	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต	287
9.1	บทนำ	287
9.2	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตแบบสองจุด	288
9.3	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง	291
9.4	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง	299
9.5	สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความซับซ้อน	305
9.6	บทสรุป	311
	แบบฝึกหัด	312
บทที่ 10	สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	323
10.1	บทนำ	323
10.2	สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	324
10.3	กล่องเครื่องมือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	325
10.4	สมการเอลลิปติก	327
10.5	สมการพาราโบลิค	342
10.6	สมการไฮเพอร์โบลิค	355
10.7	บทสรุป	366
	แบบฝึกหัด	367
บทที่ 11	ฟังก์ชันพิเศษ	379
11.1	บทนำ	379

11.2	ฟังก์ชันความคลาดเคลื่อน	380
11.3	ฟังก์ชันแกมมา	383
11.4	ฟังก์ชันบีตา	387
11.5	ฟังก์ชันเบสเซล	391
11.6	ฟังก์ชันเอรี	399
11.7	ฟังก์ชันเลอจองด์	403
11.8	อินทิกรัลพิเศษ	409
11.9	บทสรุป	413
	แบบฝึกหัด	414
บรรณานุกรม		423
ดัชนี		427
ประวัติผู้เขียน		435

บทที่ 1

คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ ด้วยซอฟต์แวร์

1.1 บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีว่าพื้นฐานของการวิเคราะห์ทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ในปัจจุบันล้วนตั้งอยู่บนความเข้าใจในคณิตศาสตร์ จึงเป็นต้นเหตุให้นักศึกษาตามสถาบันการศึกษาถูกบังคับให้เรียนวิชาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น วิชาแคลคูลัส (calculus) วิชาสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) รวมทั้งวิชาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน วิชาเหล่านี้อธิบายพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นเพื่อใช้แก้ปัญหาในระดับสูงขึ้นไป การศึกษาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เริ่มตั้งแต่การทำความเข้าใจฟังก์ชัน (function) ในรูปแบบต่าง ๆ การหาลำดับ (limit) ของฟังก์ชันเหล่านี้ การหาอนุพันธ์ (differentiation) การอินทิเกรต (integration) ฯลฯ ซึ่งต่างมีความซับซ้อนและจำเพาะในตัวเอง เป็นผลให้นักศึกษาต้องท่องจำเพื่อเตรียมตัวสอบ แต่ส่วนใหญ่ก็มักลืมวิธีการเหล่านี้หลังจากการสอบได้เสร็จสิ้นไปแล้ว นอกเหนือไปจากนั้น ความซับซ้อนและจำเพาะในวิธีการเหล่านี้ทำให้นักศึกษาจำนวนไม่น้อยไม่ได้ให้ความสนใจในการเรียนรู้เท่าใดนักเพราะยังไม่เห็นความสำคัญในการนำความรู้เหล่านี้ไปใช้ในงานได้จริง

ในการศึกษาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ดังอธิบายมาข้างต้นนี้ นักคณิตศาสตร์ (mathematicians) มักลงลึกไปในรายละเอียดด้วยการทำความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการต่าง ๆ อย่างเป็นขั้นเป็นตอน ก่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจในรายละเอียดอย่างชัดเจน ในขณะที่นักวิทยาศาสตร์ (scientists) และวิศวกร (engineers) ต้องการผลลัพธ์ขั้นสุดท้ายออกมาเป็นสมการ แล้วนำสมการนั้นมาพล็อตเพื่อศึกษาถึงปรากฏการณ์ของผลลัพธ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้โดยไม่สนใจในรายละเอียดของกระบวนการในช่วงของการประดิษฐ์สมการเหล่านั้นเท่าใดนัก ดังนั้น หากมีซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (computer software) ที่ช่วยประดิษฐ์สมการเหล่านี้ให้ได้ก็จะก่อให้เกิดประโยชน์แก่คนกลุ่มหลังนี้ได้เป็นอย่างมากทีเดียว

ทุกวันนี้ มีซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์จำนวนไม่น้อยซึ่งใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ในงานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมโดยให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นตัวเลข ซอฟต์แวร์เหล่านี้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) ในการแก้สมการทางพีชคณิต การหาค่าอนุพันธ์ การอินทิเกรตฟังก์ชัน การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ฯลฯ ก่อให้เกิดวิชาหลากหลายที่เรียนกันตามสถาบันการศึกษาทั่วไป ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการอินทิเกรต

$$\int_0^3 x^2 dx$$

เราสามารถใช้ซอฟต์แวร์เชิงตัวเลขเพื่อหาค่าผลลัพธ์ออกมาเป็นตัวเลขที่มีค่าเท่ากับ 9 ได้โดยง่าย ในแนวคิดที่คล้ายกัน หากมีซอฟต์แวร์ที่สามารถให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นสัญลักษณ์ (symbolic) ได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ เช่น

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

ก็จะก่อให้เกิดความสะดวกในการเรียนวิชาแคลคูลัสได้เป็นอย่างมากเช่นกัน

แนวความคิดการหาผลลัพธ์ในรูปแบบของคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ (symbolic mathematics) เกิดขึ้นในช่วงประมาณ พ.ศ. 2520 ผู้เขียนยังจำได้ว่าเคยใช้ซอฟต์แวร์ MACSYMA (Mac Symbolic Manipulation Program) ประดิษฐ์ขึ้นที่สถาบันเทคโนโลยีแมสซาชูเซตส์ (Massachusetts Institute of Technology, MIT) ซึ่งสามารถให้ผลลัพธ์เป็นตัวอักษร (แทนที่จะเป็นตัวเลข) ทำให้เกิดความแปลกใจเป็นอย่างมากในยุคนั้น

1.2 การแก้สมการคณิตศาสตร์ด้วยซอฟต์แวร์

ในการเรียนวิชาแคลคูลัส เราจำเป็นต้องจำสูตรหลากหลายเพื่อใช้หาค่าอนุพันธ์และค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน หากเราจำสูตรต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้องและดำเนินการอย่างเป็นขั้นเป็นตอนด้วยความระมัดระวัง เราจะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องดังตัวอย่างต่าง ๆ ต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน

$$f = \frac{x}{3 - 4\cos x}$$

วิธีการทั่วไปเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันนี้ เราจำเป็นต้องประยุกต์สูตรการหาค่าอนุพันธ์ที่เหมาะสม แล้วดำเนินการอย่างเป็นขั้นเป็นตอนโดยหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันนี้ก่อน แล้วดำเนินการซ้ำอีกครั้งเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง ก่อให้เกิดผลลัพธ์ดังนี้

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{16x \cos^2 x + 4 \cos x (3x - 8 \sin x) - 32x + 24 \sin x}{(4 \cos x - 3)^3}$$

ผลลัพธ์ข้างต้นนี้สามารถหาด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ (symbolic computer software) ได้โดยง่ายในระยะเวลาอันสั้น ยิ่งไปกว่านั้น หากเราต้องการหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นไปของฟังก์ชันนี้ เช่น อันดับที่ 10 เป็นต้น ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เหล่านี้ก็สามารถหาผลลัพธ์ให้ได้โดยง่ายในระยะเวลาอันสั้นอย่างไม่มีข้อผิดพลาด

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อน

$$g = \frac{x \tan x - 3 \tan x - 21x^3 + 7x^4}{x^3 - 3x^2 + 6x - 18}$$

ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งสามารถหาได้โดยง่ายด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ ก่อให้เกิดผลลัพธ์คือ

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{2x \tan x + 504}{(x^2 + 6)^2} + \frac{\tan^2 x + 43}{x^2 + 6} + 7$$

และค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันนี้คือ

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{2016x - 48 \tan x}{(x^2 + 6)^3} - \frac{4x \tan^2 x - 6 \tan x + 88x}{(x^2 + 6)^2} + \frac{2 \tan x (\tan^2 x + 1)}{x^2 + 6}$$

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นและมีความซับซ้อนเช่นนี้สามารถผิดพลาดได้ง่ายหากดำเนินการด้วยตนเองแบบที่เราทำกันในชั้นเรียน

ตัวอย่าง กระบวนการอินทิเกรตเป็นอีกแขนงหนึ่งในการเรียนวิชาแคลคูลัสที่ทำให้ผู้ศึกษาเกิดความไม่สบายใจเพราะต้องจำสูตรและเทคนิคหลาย ๆ อย่าง อีกทั้งไม่เห็นถึงความสำคัญของผลลัพธ์ที่จะนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในงานชนิดใดได้บ้าง ดังตัวอย่างเช่น

$$\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

หรืออีกหนึ่งตัวอย่างที่มีความซับซ้อนมากขึ้นไปอีก เช่น

$$\int_1^2 \frac{x dx}{(x+1)(2x-1)} = \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{1}{3} \ln(2)$$

ผลลัพธ์ของการอินทิเกรตข้างต้นนี้สามารถหาได้โดยสะดวกด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ในปัจจุบัน ดังนั้นจึงสามารถใช้ผลลัพธ์จากซอฟต์แวร์นี้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการทำด้วยตนเองได้ทันที

ตัวอย่าง ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ยังช่วยแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ที่บุคคลทั่วไปอาจใช้เวลาานกว่าจะได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เช่น หากต้องการแฟกเตอร์ (factor) ฟังก์ชัน

$$h = x^4 + 26x^3 - 212x^2 - 1578x + 5859$$

เราสามารถใส่ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทำให้ได้ ก่อให้เกิดผลลัพธ์

$$h = (x+7)(x-9)(x-3)(x+31)$$

โดยใช้เวลาในการทำเพียงไม่ถึงหนึ่งวินาที

ตัวอย่าง วิชาแก้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นอีกวิชาหนึ่งที่เปรียบเสมือนยาขมสำหรับผู้เรียนจำนวนไม่น้อย เพราะต้องจดจำเทคนิคและกระบวนการจำเพาะเพื่อใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งมีรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป เช่น

$$\frac{dy}{dx} + y = 5$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งข้างต้นนี้ คือ

$$y(x) = Ce^{-x} + 5$$

โดย C เป็นค่าคงตัวซึ่งสามารถหาต่อไปได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาที่กำหนดมาให้

หากสมการที่กำหนดมาให้มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เช่น อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองนี้ คือ

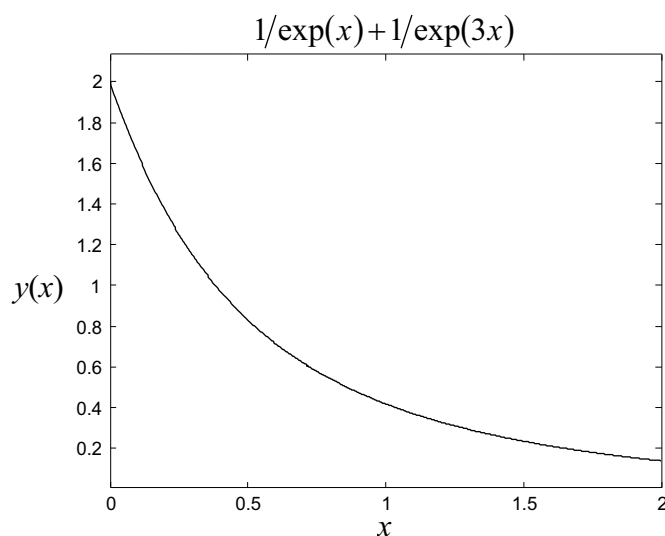
$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

โดย C_1 และ C_2 เป็นค่าคงตัวซึ่งสามารถหาต่อไปได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาลักษณะที่กำหนดมาให้เหมือนกัน

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่าง ๆ เหล่านี้ สามารถหาได้ทันทีโดยง่ายด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ อีกทั้งยังสามารถพล็อตได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ช่วยทำให้ผู้ศึกษาเข้าใจในความหมายของปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจากผลเฉลยเหล่านี้ เช่น หาก $C_1 = C_2 = 1$ แล้ว ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองข้างต้นนี้ก็คือ

$$y(x) = e^{-x} + e^{-3x}$$

ซึ่งมีลักษณะการกระจายไปตาม x ดังแสดงในรูป



1.3 ความเป็นมาและศักยภาพของแมทแล็บ

แมทแล็บ (MATLAB) เป็นชื่อย่อจากคำว่า MATrix LABoratory ถูกประดิษฐ์ขึ้นโดยศาสตราจารย์คลีฟ โมเลอร์ (Cleve Moler) ผู้เป็นหัวหน้าภาควิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ในมหาวิทยาลัยนิวแม็กซิโก ประมาณ พ.ศ. 2520 ด้วยวัตถุประสงค์ที่จะให้นักศึกษาของเขาได้ใช้ชุดคำสั่ง LINPACK ทางพีชคณิตและชุดคำสั่ง EISPACK เพื่อแก้ปัญหาคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์โดยไม่ต้องศึกษาวิธีการเขียนภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) หลังจากนั้นใน พ.ศ. 2526 วิศวกรชื่อแจ็ก ลิตเติล (Jack Little) ได้เห็นโอกาสทางธุรกิจของซอฟต์แวร์แมทแล็บนี้ จึงร่วมก่อตั้งบริษัทชื่อแมทเวิร์กส์ (Mathworks) จำหน่ายซอฟต์แวร์แมทแล็บที่มีศักยภาพสูงเพื่อแก้ปัญหาต่าง ๆ ด้วยการใช้เมทริกซ์ การพล็อตฟังก์ชัน การเพิ่มกระบวนการคำนวณแบบใหม่ ๆ ที่ผู้ใช้สามารถใช้งานได้ง่าย ทำให้ซอฟต์แวร์แมทแล็บได้รับความนิยมและรู้จักกว้างขวางมากขึ้นสำหรับการเรียนการสอนและการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับพีชคณิต (algebra) รวมทั้งระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods)

ในหลายปีที่ผ่านมา ซอฟต์แวร์แมทแล็บได้เพิ่มศักยภาพของการจัดการสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (mathematical symbolics manipulation) ลงไปด้วย โดยเริ่มจากการเชื่อมต่อกับระบบการจัดการทางคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ของซอฟต์แวร์เมเปิล (Maple) แล้วตามมาด้วยซอฟต์แวร์มิวแพด (MuPad) ส่งผลให้ศักยภาพโดยรวมของซอฟต์แวร์แมทแล็บมีความโดดเด่นขึ้นไปอีกระดับหนึ่ง กล่าวคือ สามารถจัดการกับตัวเลขด้วยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและจัดการกับคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ที่แสดงเป็นสมการทางพีชคณิตออกมาบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

หนังสือเล่มนี้เน้นการใช้แมทแล็บเพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้สัญลักษณ์ โดยอธิบายเนื้อหาของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ วิธีการนำเสนอจึงแสดงขั้นตอนที่เรียนกันในชั้นเรียนก่อนประยุกต์ใช้แมทแล็บเพื่อแก้ปัญหาเดียวกัน ผู้ศึกษาจึงได้รับความรู้พื้นฐานที่มาของการได้มาซึ่งผลลัพธ์ และในขณะเดียวกันก็จะเห็นประโยชน์ของการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ในปัจจุบันที่สามารถหาผลลัพธ์เช่นเดียวกันได้อย่างถูกต้อง สะดวก และรวดเร็ว

1.4 พื้นฐานเมทแลบที่จำเป็น

เมทแลบเป็นซอฟต์แวร์ที่มีศักยภาพสูงทำงานได้หลากหลายจึงมีขนาดใหญ่ ประกอบไปด้วยคำสั่ง (commands) กฎและระเบียบวิธีใช้งานเป็นจำนวนมาก รายละเอียดต่าง ๆ เหล่านี้ได้นำเสนอในหนังสือ “พื้นฐานเมทแลบ (MATLAB Fundamentals)” ซึ่งเขียนขึ้นโดยผู้แต่งเช่นกัน ผู้อ่านสามารถศึกษาค้นคว้าการใช้คำสั่งเพื่อการคำนวณ การพล็อตกราฟ รวมทั้งเทคนิคการใช้งานอื่น ๆ อีกเป็นจำนวนมากได้จากหนังสือเล่มนั้น แต่เนื่องจากหนังสือเล่มนี้เน้นการใช้คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ ดังนั้นจึงขอแนะนำเสนอเฉพาะคำสั่ง กฎและระเบียบเท่าที่จำเป็น ดังต่อไปนี้

เมทแลบได้ตั้งชื่อจำเพาะสำหรับค่าที่ใช้งานกันอยู่เสมอ เช่น

- i และ j ใช้แทนค่าหน่วยจินตภาพ (imaginary unit) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\sqrt{-1}$
- Inf ใช้แทนค่าอนันต์ (infinity) ซึ่งก็คือ $+\infty$ ส่วนค่า $-\infty$ นั้นแทนด้วย $-\text{Inf}$
- NaN แทนตัวเลขที่หาค่าไม่ได้ (not a number) เช่น $0/0$ หรือ Inf/Inf เป็นต้น
- eps แทนค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ ซึ่งก็คือ 2.2204×10^{-16}
- pi แทนค่าไพ (π) เมทแลบสามารถแสดงค่า π ได้จนถึงจุดทศนิยม n ตำแหน่ง ด้วยการใช้คำสั่ง $\text{vpa}(A, n)$ โดย A แทนตัวแปรที่ต้องการแสดงตัวเลข ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการแสดงค่า π ด้วยจุดทศนิยม 200 ตำแหน่ง เราก็พิมพ์ว่า

```
>> syms pi
>> vpa(pi, 200)
```

vpa

```
ans =
```

```
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749
445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066
470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055
59644622948954930382
```

หรือหากเราต้องการหาค่ารากที่สองของ 2 เราก็พิมพ์แล้วเมทแลบก็จะให้ผลลัพธ์ออกมาว่า

```
>> vpa('(2)^(1/2)', 200)
```

```
ans =
```

```
1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766
797379907324784621070388503875343276415727350138462309122970
249248360558507372126441214970999358314132226659275055927557
999505011527820605715
```

เป็นต้น

คำสั่ง `syms` ดังแสดงข้างต้นนี้ใช้เพื่อกำหนดตัวแปรให้เป็นสัญลักษณ์ ยกตัวอย่าง เช่น หากเรามีสมการ

$$u = 2x - 7y + t^2$$

และเราต้องการกำหนด x, y และ t เป็นตัวแปรด้วยกันทั้งหมด เราก็พิมพ์ว่า

```
>> syms x y t
>> u = 2*x - 7*y + t^2

u =
t^2 + 2*x - 7*y
```

syms

เป็นต้น

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ สมการต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นมักเป็นสมการทางพีชคณิตที่มีความซับซ้อน ดังนั้น การกระจายและการจัดรวมพจน์ต่าง ๆ เข้าด้วยกันอย่างเป็นระเบียบจะช่วยให้สมการทางพีชคณิตนั้นดูง่ายขึ้น แมทแลบมีหลายคำสั่งที่ช่วยจัดการสิ่งเหล่านี้ คำสั่งที่สำคัญ ๆ และเป็นประโยชน์ต่อการทำคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ มีดังต่อไปนี้

คำสั่ง `collect` ทำการกระจายพจน์แล้วรวมพจน์ที่กำลังเหมือนกันเข้าด้วยกัน เช่น

$$f = (x+5)(x-3)$$

```
>> syms x
>> f = (x+5)*(x-3);
>> collect(f)

ans =
x^2 + 2*x - 15
```

collect

ซึ่งผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้ก็คือ

$$f = x^2 + 2x - 15$$

คำสั่ง `expand` ใช้กระจายพจน์ต่าง ๆ ออกเพื่อให้เห็นรายละเอียด เช่น เราต้องการกระจายฟังก์ชัน

$$g = \cos(x+y)$$

1.4 พื้นฐานเมทแลบที่จำเป็น

9

```
>> syms x y
>> g = cos(x+y);
>> expand(g)
```

expand

```
ans =
cos(x)*cos(y) - sin(x)*sin(y)
```

ซึ่งก็คือ

$$g = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

คำสั่ง `factor` ใช้แฟกเตอร์ฟังก์ชันออกมาเป็นผลคูณทำให้ดูง่ายขึ้น ยกตัวอย่าง

เช่น

$$h = 6x^3 + 11x^2 - 16x - 21$$

```
>> h = 6*x^3 + 11*x^2 - 16*x - 21;
>> factor(h)
```

factor

```
ans =
(3*x + 7)*(2*x - 3)*(x + 1)
```

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการแฟกเตอร์ฟังก์ชันนี้ก็คือ

$$h = (3x + 7)(2x - 3)(x + 1)$$

คำสั่ง `simplify` ช่วยทำให้ฟังก์ชันนั้นลดรูปลงเพื่อให้ดูกระชับและง่ายขึ้น

ยกตัวอย่างเช่น

$$u = \frac{x + 2y}{\frac{2}{x} + \frac{1}{y}}$$

```
>> u = (x + 2*y)/(2/x + 1/y);
>> simplify(u)
```

simplify

```
ans =
```

```
x*y
```

ซึ่งผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นก็คือ

$$u = xy$$

คำสั่ง `simple` เป็นคำสั่งที่นิยมใช้มากที่สุดเพราะคำสั่งนี้ผนวกคำสั่ง

`collect`, `expand`, `factor` และ `simplify` เข้าด้วยกัน ยกตัวอย่างเช่น

$$v = \frac{2x^5 - 5x^4 + 58x - 145}{2x - 5}$$

```
>> v = (2*x^5 - 5*x^4 + 58*x - 145)/(2*x - 5);
>> simple(v)
```

simple

```
ans =
x^4 + 29
```

ซึ่งผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นคือ

$$v = x^4 + 29$$

อนึ่ง ก่อนที่จะได้มาซึ่งผลลัพธ์สุดท้ายจากการใช้คำสั่ง simple ดังแสดงข้างต้นนี้ แมทแล็บได้ใช้คำสั่งย่อย ๆ โดยแสดงขั้นตอนและผลลัพธ์จากการใช้แต่ละคำสั่งย่อยบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ คำสั่งย่อยและผลลัพธ์เหล่านี้เกิดขึ้นโดยอัตโนมัติและมีจำนวนมากจึงไม่ได้นำเสนอรายละเอียดในที่นี้

คำสั่ง pretty เป็นคำสั่งสุดท้ายที่นิยมใช้กัน เพราะแมทแล็บจะแสดงผลลัพธ์ในรูปแบบของเศษส่วนเช่นเดียวกันกับแบบที่เราเคยชิน ยกตัวอย่างเช่น

$$w = \frac{x \sin x}{x^2 + 12}$$

```
>> w = x*sin(x)/(x^2+12);
>> pretty(w)
```

pretty

```

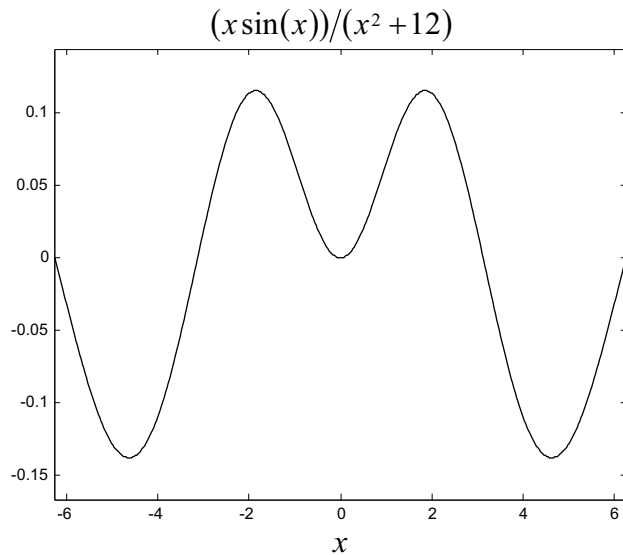
x sin(x)
-----
  2
x  + 12
```

แมทแล็บมีคำสั่ง ezplot ที่ใช้พล็อตฟังก์ชันได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพ ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการพล็อตฟังก์ชัน w ข้างต้นนี้ เราก็เพียงพิมพ์ว่า

```
>> ezplot(w)
```

ezplot

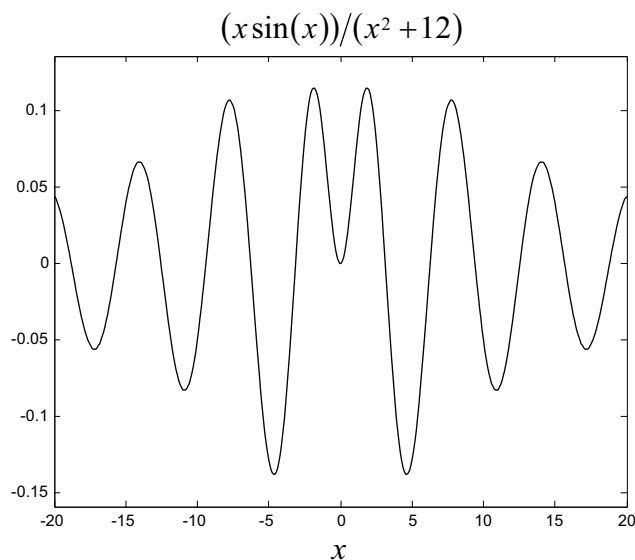
ก็จะปรากฏภาพของการพล็อตฟังก์ชัน w ขึ้นมาโดยแมทแล็บจัดการกับสเกล (scale) ของแกนนอนและแกนตั้งให้โดยอัตโนมัติ



อนึ่ง หากเราต้องการเปลี่ยนสเกลของแกนนอน x เช่น ต้องการพล็อตในช่วง $-20 \leq x \leq 20$ เราก็เพียงพิมพ์เพิ่มขึ้นเป็นว่า

```
>> ezplot(w, [-20,20])
```

ezplot



หากเราต้องการเปลี่ยนสเกลทั้งแกนนอน x และแกนตั้ง w ตามความต้องการของเรา เช่น ต้องการพล็อตในช่วง $0 \leq x \leq 40$ และ $-0.20 \leq w \leq 0.15$ เราสามารถใช้คำสั่ง `plot` ในเมทแลบซึ่งเปิดโอกาสให้เราปรับแต่งลักษณะการพล็อตได้ตามความต้องการ ใน