

# Calculus & Differential Equations with PYTHON



แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยไพธอน



# แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ ด้วยโฟตอน



# แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ ด้วยโฟตอน

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

 **สำนักพิมพ์**  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2563

360.-

## ปราโมทย์ เศษอำไพ

แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยไพธอน / ปราโมทย์ เศษอำไพ

1. แคลคูลัส. 2. แคลคูลัส -- โปรแกรมคอมพิวเตอร์. 3. สมการเชิงอนุพันธ์.
4. ไพธอน (ภาษาคอมพิวเตอร์)

515

ISBN 978-974-03-3948-9

สปจ. 2447



assคุณค่าวิชาการ สู่สังคม  
Knowledge to All  
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่ผู้เดียว  
การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น  
ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดพิมพ์โดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 1,000 เล่ม พ.ศ. 2563

ผู้จัดทำนาย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา

ศาลาพระเกี้ยว โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495

ม.นเรศวร จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239

โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023

ม.พะเยา จ.พะเยา โทร. 0-5446-6799-800 โทรสาร 0-5446-6798

จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304

หัวหมาก โทร. 0-2374-1378 โทรสาร 0-2374-1377

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน จ.นครราชสีมา โทร. 0-4492-2662-3 โทรสาร 0-4492-2664

Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com> และเครือข่ายฯ

ร้านค้าติดต่อ แผนกขายส่ง สาขาหัวหมาก โทร. 0-2374-1375-6 โทรสาร 0-2374-1375

กองบรรณาธิการ : อรุณี เสมวสิน

ออกแบบปกและรูปเล่ม : ไกรอัมพร พงษ์จักร

พิมพ์ที่ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย [CUB6306-001] โทร. 0-2218-3562-3 โทรสาร 0-2218-3547

[www.cupress.chula.ac.th](http://www.cupress.chula.ac.th)

# คำนำ

ไพธอน (Python) เป็นภาษาคอมพิวเตอร์ที่ได้รับความนิยมเป็นอย่างมากในปัจจุบัน เพราะศึกษาทำความเข้าใจและใช้งานได้ง่าย เหมาะสำหรับผู้เริ่มต้นศึกษาการใช้ภาษาคอมพิวเตอร์เพื่อประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นเอง ไพธอนยังประกอบด้วยแพ็คเกจเป็นจำนวนมากที่ช่วยทำให้การแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมเป็นไปได้โดยสะดวก และที่สำคัญที่สุดคือผู้ใช้สามารถนำมาใช้งานได้ฟรี เมื่อเปรียบเทียบกับซอฟต์แวร์อื่น ๆ ในระดับเดียวกันที่ต้องเสียค่าใช้จ่ายเป็นจำนวนมาก

จุดเด่นอีกประการหนึ่งของไพธอน คือ ศักยภาพทางด้านคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ (symbolic mathematics) ที่ทำให้การเรียนรู้วิชาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์นั้นง่ายดายขึ้นเป็นอย่างมาก ผู้เรียนสามารถตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์หลังจากได้เรียนรู้วิธีการจากชั้นเรียน ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นสามารถพล็อตขึ้นได้โดยง่ายเช่นกัน ทำให้เข้าใจในความหมายทางกายภาพของผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นนั้นได้ทันที

ความรู้พื้นฐานของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์เป็นสิ่งจำเป็นต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นสูงที่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้จริง หนังสือเล่มนี้จึงแต่งขึ้นเพื่อให้ผู้ศึกษาได้ก้าวพ้นความยากลำบากของวิชาเช่นนี้ที่เปรียบเสมือนยาขมในอดีต เนื่องจากไพธอนสามารถดาวน์โหลดมาใช้ได้ฟรี ผู้ใช้จึงเพียงศึกษารูปแบบของคำสั่งในหนังสือเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาอื่น ๆ ได้อีกเป็นจำนวนมาก

ผู้เขียนขอขอบคุณ ดร.เสกฐาวร สุขจิตสวัสดิ์ ที่ช่วยอ่านตรวจทานความถูกต้องอย่างละเอียด ขอขอบคุณนางสาวไกรอำพร พงษ์จร ที่ช่วยพิมพ์และจัดเรียงหน้าเนื้อหาอย่างเหมาะสม และขอขอบคุณสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้เพื่อเป็นประโยชน์ต่ออนิสิต นักศึกษา รวมทั้งนักเรียนระดับชั้นมัธยมในปัจจุบันที่ไพธอนถูกบรรจุให้เป็นภาษาคอมพิวเตอร์เพื่อการเรียนรู้เบื้องต้น

ปราโมทย์ เดชะอำไพ  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





# สารบัญ

## คำนำ

|                |                                         |           |
|----------------|-----------------------------------------|-----------|
| <b>บทที่ 1</b> | <b>คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ด้วยซอฟต์แวร์</b> | <b>1</b>  |
| 1.1            | บทนำ                                    | 1         |
| 1.2            | การแก้สมการคณิตศาสตร์ด้วยซอฟต์แวร์      | 3         |
| 1.3            | ความเป็นมาและศักยภาพของไพธอน            | 6         |
| 1.4            | พื้นฐานไพธอนที่จำเป็น                   | 8         |
| 1.5            | บทสรุป                                  | 12        |
|                | แบบฝึกหัด                               | 13        |
| <b>บทที่ 2</b> | <b>แคลคูลัส</b>                         | <b>19</b> |
| 2.1            | บทนำ                                    | 19        |
| 2.2            | การหาค่าลิมิต                           | 20        |
| 2.3            | การหาค่าอนุพันธ์                        | 25        |
| 2.4            | การอินทิเกรต                            | 34        |
| 2.5            | อนุกรมเทย์เลอร์                         | 41        |
| 2.6            | อนุกรมทั่วไป                            | 46        |
| 2.7            | บทสรุป                                  | 47        |
|                | แบบฝึกหัด                               | 48        |
| <b>บทที่ 3</b> | <b>สมการเชิงอนุพันธ์</b>                | <b>55</b> |
| 3.1            | บทนำ                                    | 55        |
| 3.2            | ลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์              | 56        |
| 3.3            | ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์              | 58        |

|                |                                            |            |
|----------------|--------------------------------------------|------------|
| 3.4            | บทสรุป                                     | 67         |
|                | แบบฝึกหัด                                  | 68         |
| <b>บทที่ 4</b> | <b>สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง</b>        | <b>75</b>  |
| 4.1            | บทนำ                                       | 75         |
| 4.2            | สมการแบบแยกได้                             | 76         |
| 4.3            | สมการเชิงเส้น                              | 83         |
| 4.4            | สมการแม่นตรง                               | 90         |
| 4.5            | สมการรูปแบบจำเพาะ เบร์นูลลี และริคคาตี     | 102        |
| 4.6            | วิธีเชิงตัวเลข                             | 108        |
| 4.7            | บทสรุป                                     | 114        |
|                | แบบฝึกหัด                                  | 115        |
| <b>บทที่ 5</b> | <b>สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง</b>      | <b>123</b> |
| 5.1            | บทนำ                                       | 123        |
| 5.2            | สมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว | 124        |
| 5.3            | ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน      | 127        |
| 5.4            | ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน       | 130        |
| 5.5            | ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าคอนจูเกตเชิงซ้อน      | 136        |
| 5.6            | สมการไม่เอกพันธ์                           | 143        |
| 5.7            | วิธีหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่รู้ค่า          | 145        |
| 5.8            | วิธีแปรผันพารามิเตอร์                      | 151        |
| 5.9            | วิธีเชิงตัวเลข                             | 159        |
| 5.10           | บทสรุป                                     | 167        |
|                | แบบฝึกหัด                                  | 168        |

|                |                                             |            |
|----------------|---------------------------------------------|------------|
| <b>บทที่ 6</b> | <b>สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูงขึ้นไป</b> | <b>177</b> |
| 6.1            | บทนำ                                        | 177        |
| 6.2            | สมการเอกพันธ์ที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว    | 178        |
| 6.3            | ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน       | 181        |
| 6.4            | ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน        | 184        |
| 6.5            | ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าคอนจูเกตเชิงซ้อน       | 187        |
| 6.6            | ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าผสม                    | 190        |
| 6.7            | สมการไม่เอกพันธ์                            | 192        |
| 6.8            | วิธีเชิงตัวเลข                              | 199        |
| 6.9            | บทสรุป                                      | 205        |
|                | แบบฝึกหัด                                   | 206        |
| <b>บทที่ 7</b> | <b>การแปลงลาปลาซ</b>                        | <b>215</b> |
| 7.1            | บทนำ                                        | 215        |
| 7.2            | สมการพื้นฐาน                                | 216        |
| 7.3            | การแปลงลาปลาซ                               | 219        |
| 7.4            | การแปลงลาปลาซผกผัน                          | 222        |
| 7.5            | การแก้สมการเชิงอนุพันธ์                     | 226        |
| 7.6            | บทสรุป                                      | 242        |
|                | แบบฝึกหัด                                   | 242        |
| <b>บทที่ 8</b> | <b>การแปลงฟูริเยร์</b>                      | <b>249</b> |
| 8.1            | บทนำ                                        | 249        |
| 8.2            | สมการพื้นฐาน                                | 250        |
| 8.3            | การแปลงฟูริเยร์                             | 253        |
| 8.4            | การแปลงฟูริเยร์ผกผัน                        | 258        |

|                 |                                   |            |
|-----------------|-----------------------------------|------------|
| 8.5             | การแปลงฟูริเยร์แบบเร็ว            | 261        |
| 8.6             | การแก้สมการเชิงอนุพันธ์           | 265        |
| 8.7             | บทสรุป                            | 269        |
|                 | แบบฝึกหัด                         | 269        |
| <b>บทที่ 9</b>  | <b>ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต</b>        | <b>273</b> |
| 9.1             | บทนำ                              | 273        |
| 9.2             | ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตแบบสองจุด      | 274        |
| 9.3             | สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง        | 278        |
| 9.4             | สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง        | 284        |
| 9.5             | สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความซับซ้อน | 290        |
| 9.6             | บทสรุป                            | 296        |
|                 | แบบฝึกหัด                         | 296        |
| <b>บทที่ 10</b> | <b>สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย</b>      | <b>307</b> |
| 10.1            | บทนำ                              | 307        |
| 10.2            | สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย             | 308        |
| 10.3            | สมการเอลลิปติก                    | 309        |
| 10.4            | สมการพาราโบลิค                    | 320        |
| 10.5            | สมการไฮเพอร์โบลิค                 | 331        |
| 10.6            | บทสรุป                            | 340        |
|                 | แบบฝึกหัด                         | 341        |
| <b>บทที่ 11</b> | <b>ฟังก์ชันพิเศษ</b>              | <b>351</b> |
| 11.1            | บทนำ                              | 351        |
| 11.2            | ฟังก์ชันความคลาดเคลื่อน           | 352        |

|                        |                   |            |
|------------------------|-------------------|------------|
| 11.3                   | ฟังก์ชันแกมมา     | 354        |
| 11.4                   | ฟังก์ชันบีตา      | 359        |
| 11.5                   | ฟังก์ชันเบสเซล    | 362        |
| 11.6                   | ฟังก์ชันเอรี      | 370        |
| 11.7                   | ฟังก์ชันเลอจองดร์ | 373        |
| 11.8                   | อินทิกรัลพิเศษ    | 378        |
| 11.9                   | บทสรุป            | 382        |
|                        | แบบฝึกหัด         | 383        |
| <b>บรรณานุกรม</b>      |                   | <b>393</b> |
| <b>ดรรชนี</b>          |                   | <b>395</b> |
| <b>ประวัติผู้เขียน</b> |                   | <b>403</b> |



# บทที่ 1

## คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ ด้วยซอฟต์แวร์

### 1.1 บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีว่าพื้นฐานของการวิเคราะห์งานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ในปัจจุบันล้วนตั้งอยู่บนความเข้าใจในคณิตศาสตร์ จึงเป็นเหตุให้นักศึกษาตามสถาบันการศึกษาถูกบังคับให้เรียนวิชาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น วิชาแคลคูลัส (calculus) วิชาสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) รวมทั้งวิชาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน วิชาเหล่านี้อธิบายพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นเพื่อใช้แก้ปัญหาในระดับสูงขึ้นไป การศึกษาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เริ่มตั้งแต่การทำความรู้จักฟังก์ชัน (function) ในรูปแบบต่าง ๆ การหาค่าลิมิต (limit) ของฟังก์ชันเหล่านี้ การหาอนุพันธ์ (differentiation) การอินทิเกรต (integration) ฯลฯ ซึ่งต่างมีความซับซ้อนและจำเพาะในตัวเอง เป็นผลให้นักศึกษาต้องท่องจำเพื่อเตรียมตัวสอบ แต่ส่วนใหญ่ก็มักลืมวิธีการเหล่านี้หลังจากการสอบได้เสร็จสิ้นไปแล้ว นอกเหนือไปจากนั้น ความซับซ้อนและจำเพาะในวิธีการเหล่านี้ทำให้นักศึกษาจำนวนไม่น้อยไม่ได้ให้ความสนใจในการเรียนรู้เท่าที่ควร เพราะไม่เห็นความสำคัญของการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์เหล่านี้เพื่อไปใช้งานได้จริง

ในการศึกษาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ดังอธิบายมาข้างต้นนี้ นักคณิตศาสตร์ (mathematicians) มักลงลึกไปในรายละเอียดด้วยการทำความเข้าใจเพื่อการประติสัมพันธ์ต่าง ๆ อย่างเป็นขั้นเป็นตอน ก่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจในรายละเอียดอย่างชัดเจน ในขณะที่นักวิทยาศาสตร์ (scientists) และวิศวกร (engineers) ต้องการผลลัพธ์ขั้นสุดท้ายออกมาเป็นสมการ แล้วนำสมการนั้นมาพล็อตเพื่อศึกษาถึงปรากฏการณ์ของผลลัพธ์ที่ประติสัมพันธ์ได้โดยไม่สนใจในรายละเอียดของกระบวนการในช่วงของการประติสัมพันธ์เหล่านี้เท่าใดนัก ดังนั้น หากมีซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (computer software) ที่ช่วยประติสัมพันธ์เหล่านี้ให้ได้ ก็จะก่อให้เกิดประโยชน์แก่คนกลุ่มหลังนี้ได้เป็นอย่างมากทีเดียว

ทุกวันนี้ มีซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์จำนวนไม่น้อยซึ่งใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ในงานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมโดยให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นตัวเลข ซอฟต์แวร์เหล่านี้ใช้วิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) เพื่อแก้สมการทางพีชคณิต การหาค่าอนุพันธ์ การอินทิเกรตฟังก์ชัน การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ฯลฯ ก่อให้เกิดวิชาหลากหลายที่เรียนกันตามสถาบันการศึกษาทั่วไป เช่น หากเราต้องการอินทิเกรต

$$\int_0^3 x^2 dx$$

เราสามารถใช้ซอฟต์แวร์เชิงตัวเลขเพื่อหาค่าผลลัพธ์ออกมาเป็นตัวเลขที่มีค่าเท่ากับ 9 ได้โดยง่าย ในแนวคิดที่คล้ายกัน หากมีซอฟต์แวร์ที่สามารถให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นสัญลักษณ์ (symbolic) ได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ เช่น

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

ก็จะก่อให้เกิดความสะดวกในการเรียนวิชาแคลคูลัสได้เป็นอย่างมากเช่นกัน

แนวความคิดการหาผลลัพธ์ในรูปแบบของคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ (symbolic mathematics) เกิดขึ้นในช่วงประมาณ พ.ศ. 2520 ผู้เขียนยังจำได้ว่าเคยใช้ซอฟต์แวร์ MACSYMA (Mac Symbolic Manipulation Program) ประติสัมพันธ์ที่สถาบันเทคโนโลยีแมสซาชูเซตส์ (Massachusetts Institute of Technology, MIT) ซึ่งสามารถให้ผลลัพธ์เป็นตัวอักษร (แทนที่จะเป็นตัวเลข) ทำให้เกิดความแปลกใจเป็นอย่างมากในยุคนั้น



## 1.2 การแก้สมการคณิตศาสตร์ด้วยซอฟต์แวร์

ในการเรียนวิชาแคลคูลัส เราจำเป็นต้องจำสูตรหลากหลายเพื่อใช้หาค่าอนุพันธ์และค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน หากเราจำสูตรต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้องและดำเนินการอย่างเป็นขั้นเป็นตอนด้วยความระมัดระวัง เราจะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง ดังตัวอย่างต่าง ๆ ต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน

$$f = \frac{x}{3 - 4\cos x}$$

วิธีการทั่วไปเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันนี้ เราจำเป็นต้องประยุกต์สูตรการหาค่าอนุพันธ์ที่เหมาะสม แล้วดำเนินการอย่างเป็นขั้นเป็นตอนโดยหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันนี้ก่อน แล้วดำเนินการซ้ำอีกครั้งเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง ก่อให้เกิดผลลัพธ์ ดังนี้

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{16x \cos^2 x + 4 \cos x (3x - 8 \sin x) - 32x + 24 \sin x}{(4 \cos x - 3)^3}$$

ผลลัพธ์ข้างต้นนี้สามารถหาด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ (symbolic computer software) ได้โดยง่ายในระยะเวลาอันสั้น ยิ่งไปกว่านั้น หากเราต้องการหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นไปของฟังก์ชันนี้ เช่น อันดับที่ 10 เป็นต้น ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เหล่านี้ก็สามารถหาผลลัพธ์ให้ได้โดยง่ายในระยะเวลาอันสั้นอย่างไม่มีข้อผิดพลาด

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อน

$$g = \frac{x \tan x - 3 \tan x - 21x^3 + 7x^4}{x^3 - 3x^2 + 6x - 18}$$

ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งสามารถหาได้โดยง่ายด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ ก่อให้เกิดผลลัพธ์ คือ

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{2x \tan x + 504}{(x^2 + 6)^2} + \frac{\tan^2 x + 43}{x^2 + 6} + 7$$

และค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันนี้ คือ

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{2016x - 48 \tan x}{(x^2 + 6)^3} - \frac{4x \tan^2 x - 6 \tan x + 88x}{(x^2 + 6)^2} + \frac{2 \tan x (\tan^2 x + 1)}{x^2 + 6}$$

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นและมีความซับซ้อนเช่นนี้สามารถผลิตพลาดได้ง่ายหากทำด้วยมือแบบที่เราคุ้นเคยกันในชั้นเรียน

ตัวอย่าง กระบวนการอินทิเกรตเป็นอีกแขนงหนึ่งในการเรียนวิชาแคลคูลัสที่ทำให้ผู้ศึกษาเกิดความไม่สบายใจเพราะต้องจำสูตรและเทคนิคหลาย ๆ อย่าง อีกทั้งไม่เห็นถึงความสำคัญของผลลัพธ์ที่จะนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในงานชนิดใดได้บ้าง ดังตัวอย่างเช่น

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

หรืออีกหนึ่งตัวอย่างที่มีความซับซ้อนมากขึ้นไปอีก เช่น

$$\int_1^2 \frac{x dx}{(x+1)(2x-1)} = \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{1}{3} \ln(2)$$

ผลลัพธ์ของการอินทิเกรตข้างต้นนี้สามารถหาได้โดยสะดวกด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ในปัจจุบันเช่นกัน ดังนั้นเราจึงสามารถใช้ผลลัพธ์จากซอฟต์แวร์นี้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการทำด้วยมือได้ทันที

ตัวอย่าง ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ยังช่วยแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ที่บุคคลทั่วไปอาจใช้เวลาานกว่าจะได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เช่น หากต้องการแฟกเตอร์ (factor) ฟังก์ชัน

$$h = x^4 + 26x^3 - 212x^2 - 1578x + 5859$$

เราสามารถใส่ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทำให้ได้ ก่อให้เกิดผลลัพธ์

$$h = (x+7)(x-9)(x-3)(x+31)$$

โดยใช้เวลาในการทำเพียงไม่ถึงหนึ่งวินาที

ตัวอย่าง วิชาแก้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นอีกวิชาหนึ่งที่เปรียบเสมือนยาขมสำหรับผู้เรียนจำนวนไม่น้อย เพราะต้องจดจำเทคนิคและกระบวนการจำเพาะเพื่อใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งมีรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป เช่น

$$\frac{dy}{dx} + y = 5$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งข้างต้นนี้ คือ

$$y(x) = Ce^{-x} + 5$$

โดย  $C$  เป็นค่าคงตัว ซึ่งสามารถหาต่อไปได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาที่กำหนดมาให้

หากสมการที่กำหนดมาให้มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เช่น อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองนี้ คือ

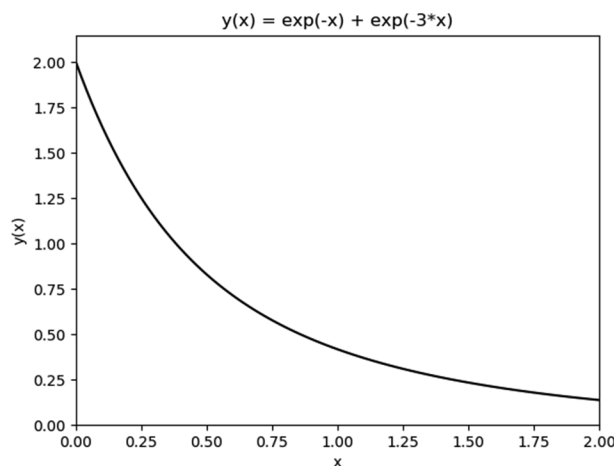
$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

โดย  $C_1$  และ  $C_2$  เป็นค่าคงตัวซึ่งสามารถหาต่อไปได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาลักษณะที่กำหนดมาให้เหมือนกัน

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่าง ๆ เหล่านี้ สามารถหาได้ทันทีโดยง่ายด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ อีกทั้งยังสามารถพล็อตได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ช่วยทำให้ผู้ศึกษาเข้าใจในความหมายของปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจากผลเฉลยเหล่านี้ เช่น หาก  $C_1 = C_2 = 1$  แล้ว ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองข้างต้นนี้ ก็คือ

$$y(x) = e^{-x} + e^{-3x}$$

ซึ่งมีลักษณะการกระจายไปตาม  $x$  ดังแสดงในรูป



### 1.3 ความเป็นมาและศักยภาพของไพธอน

ไพธอน (Python) เป็นซอฟต์แวร์ที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เพราะมีศักยภาพด้านคณิตศาสตร์และการคำนวณอยู่ในระดับสูง เป็นซอฟต์แวร์ที่ใช้งานได้สะดวก และที่สำคัญที่สุด คือ ผู้ใช้สามารถดาวน์โหลด (download) มาใช้งานได้ฟรี ในขณะที่การใช้ซอฟต์แวร์อื่น ๆ นั้นมีค่าใช้จ่าย เช่น ซอฟต์แวร์แมทแล็บ (MATLAB) แมทมาทิกา (Mathematica) เมเปิล (Maple) เป็นต้น

ซอฟต์แวร์ต่าง ๆ ข้างต้นนี้ล้วนเป็นที่นิยมใช้กันเพราะบรรจุโมดูล (module) สำเร็จรูปที่สามารถให้ผลลัพธ์ได้ทันทีโดยที่ผู้ใช้ไม่ต้องเขียนโปรแกรมย่อย (subroutine) เหมือนดังที่เคยทำกันมาในอดีต โมดูลสำเร็จรูปต่าง ๆ เหล่านี้มีประโยชน์สำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์และการคำนวณ เช่น โมดูลเพื่อหาผลลัพธ์ทั่วไป (general solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) โมดูลเพื่อการอินทิเกรตฟังก์ชันที่กำหนดให้ออกมาในรูปแบบของสัญลักษณ์ (symbolic) หรือตัวเลข (numbers) รวมไปถึงการแก้ระบบสมการทางพีชคณิต (algebraic equations) ที่จำเป็นต้องใช้เพื่อหาผลลัพธ์ของงานทางคณิตศาสตร์และวิศวกรรมในปัจจุบัน

ซอฟต์แวร์ไพธอน (Python) ได้ถูกประดิษฐ์โดย Guido Van Rossum ในสถาบันวิจัยด้านคณิตศาสตร์และการคำนวณ ประเทศเนเธอร์แลนด์ในช่วง ค.ศ. 1980 จากนั้นเริ่มเป็นที่รู้จักและใช้กันมากขึ้น ได้รับการพัฒนาจนกลายเป็นรุ่น Python 2 และ Python 3 ใน ค.ศ. 2000 และ ค.ศ. 2008 ตามลำดับ ในปัจจุบัน Python 3 ได้นำมาใช้กันอย่างแพร่หลายทั้งในด้านวิชาการ การวิจัยและพัฒนา ไปจนถึงการประยุกต์ใช้ในภาคอุตสาหกรรม

ซอฟต์แวร์ไพธอนสามารถดาวน์โหลดนำมาใช้ได้ฟรีโดยไม่เสียค่าใช้จ่ายจากเว็บไซต์ <https://www.python.org> การดาวน์โหลดนั้นสามารถทำได้โดยง่ายตามขั้นตอนที่แนะนำในเว็บไซต์นั้น

การใช้งานซอฟต์แวร์ไพธอนหลังจากติดตั้งสำเร็จบนเครื่องคอมพิวเตอร์แล้ว แบ่งออกเป็น 2 โหมด (mode) คือ (1) โหมดใช้งานโดยตรง (interactive mode) และ (2) โหมดสคริปต์ (script mode) กล่าวคือ ผู้ใช้รวมคำสั่งขึ้นเป็นไฟล์สคริปต์แล้วให้

ไพธอนคำนวณรวดเร็วเลยได้ คล้ายกับการใช้โปรแกรมย่อย (subroutine) หรือฟังก์ชันย่อย (function routine) ในภาษาอื่น ๆ

อนึ่ง ในปัจจุบันมีผู้แต่งเชลล์ไพธอน (python shell) หลากหลายในรูปแบบแตกต่างกัน ทำให้การใช้ซอฟต์แวร์ไพธอนบนวินโดวส์ (windows) เป็นไปได้โดยสะดวก และได้ผลลัพธ์ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ที่มีความสวยงามมากยิ่งขึ้น เชลล์ไพธอนประกอบไปด้วย IDLE (Integrated DeveLopment Environment), Notepad, PyCharm, Anaconda เป็นต้น

หากผู้ใช้โดยเคยสัมผัสการใช้ซอฟต์แวร์แมทแลบ (MATLAB) มาก่อน จะพบว่าซอฟต์แวร์ไพธอนและแมทแลบมีความคล้ายคลึงกันมากทีเดียว ไม่ว่าจะเป็นลักษณะการเขียนโปรแกรมหรือการใช้งานแพ็คเกจ (package) สำเร็จรูปเพื่อการหาผลลัพธ์และการพล็อตกราฟ แมทแลบมีแพ็คเกจสำเร็จรูปเหล่านี้ฝังตัวในซอฟต์แวร์เรียบร้อยแล้ว ผู้ใช้เพียงเรียกชื่อแพ็คเกจเพื่อนำมาใช้งานได้เลย ในขณะที่ไพธอนไม่มีแพ็คเกจเหล่านี้และต้องเรียกใช้แพ็คเกจที่คล้ายคลึงกันจากภายนอก จึงทำให้การใช้งานอาจซับซ้อนขึ้นมาอีกเล็กน้อย แพ็คเกจเหล่านี้ที่สำคัญ ๆ สำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์และการคำนวณประกอบไปด้วย: (1) numpy เป็นอัลกอริทึม (algorithm) เชิงตัวเลข, (2) math เป็นฟังก์ชันมาตรฐานทางคณิตศาสตร์, (3) sympy เป็นแพ็คเกจที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ (symbolic mathematics), (4) matplotlib เป็นแพ็คเกจเพื่อพล็อตกราฟใน 2 และ 3 มิติ เป็นต้น ผู้ใช้ต้องดาวน์โหลดและติดตั้ง (install) แพ็คเกจเหล่านี้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ก่อนการใช้งาน ขั้นตอนการดาวน์โหลดและติดตั้งแพ็คเกจต่าง ๆ สามารถทำได้โดยสะดวกจากคำแนะนำในเว็บไซต์เหล่านั้น

หนังสือเล่มนี้เน้นการใช้ไพธอนเพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้สัญลักษณ์ โดยอธิบายเนื้อหาของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ วิธีการนำเสนอจึงแสดงขั้นตอนที่เรียนกันในชั้นเรียนก่อนประยุกต์ใช้ไพธอนเพื่อแก้ปัญหาเดียวกัน ผู้ศึกษาจึงได้รับความรู้พื้นฐานที่มาของการได้มาซึ่งผลลัพธ์ และในขณะเดียวกันก็จะเห็นประโยชน์ของการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ในปัจจุบันที่สามารถหาผลลัพธ์เช่นเดียวกันได้อย่างถูกต้อง สะดวกและรวดเร็ว

## 1.4 พื้นฐานไพธอนที่จำเป็น

ไพธอนเป็นซอฟต์แวร์ที่มีศักยภาพสูงทำงานได้หลากหลายประกอบไปด้วยคำสั่ง (commands) กฎและระเบียบวิธีใช้งานเป็นจำนวนมาก รายละเอียดต่าง ๆ เหล่านี้ได้นำเสนอในหนังสือ “ไพธอนสำหรับคณิตศาสตร์และการคำนวณ (Python for Mathematics and Computations)” ซึ่งเขียนขึ้นโดยผู้แต่งเช่นกัน ผู้อ่านสามารถศึกษาค้นคว้าการใช้คำสั่งเพื่อการคำนวณ การพล็อตกราฟ รวมทั้งเทคนิคการใช้งานอื่น ๆ อีกเป็นจำนวนมากได้จากหนังสือเล่มนั้น แต่เนื่องจากหนังสือเล่มนี้เน้นการใช้คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ ดังนั้นจึงขอแนะนำเสนอเฉพาะคำสั่ง กฎและระเบียบเท่าที่จำเป็น ดังต่อไปนี้

ไพธอนบรรจุแพ็คเกจต่าง ๆ ซึ่งมีชื่อเฉพาะสำหรับค่าที่ใช้งานกันอยู่เสมอ เช่น

- `I` ใช้แทนค่าหน่วยจินตภาพ (imaginary unit) ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $\sqrt{-1}$
- `inf` ใช้แทนค่าอนันต์ (infinity) ซึ่งก็คือ  $+\infty$  ส่วนค่า  $-\infty$  นั้นแทนด้วย `-inf`
- `nan` แทนตัวเลขที่หาค่าไม่ได้ (not a number) เช่น `0/0` หรือ `inf/inf` เป็นต้น
- `eps` แทนค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ ซึ่งก็คือ  $2.22044604925 \times 10^{-16}$
- `pi` แทนค่าไพ ( $\pi$ ) ไพธอนสามารถแสดงค่า  $\pi$  ได้จนถึงจุดทศนิยม  $n$  ตำแหน่ง ด้วยการใช้คำสั่ง `sym.pi.evalf(n)` โดย  $n$  แทนตัวแปรที่ต้องการแสดงตัวเลข เช่น หากเราต้องการแสดงค่า  $\pi$  ด้วยจุดทศนิยม 200 ตำแหน่ง เราก็พิมพ์ว่า

```
>>> import sympy as sym
>>> sym.pi.evalf(200)
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749
445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066
470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055
596446229489549303820
```

หรือหากเราต้องการหาค่ารากที่สองของ 2 ด้วยจุดทศนิยม 30 ตำแหน่ง เราก็พิมพ์ว่า

```
>>> sym.N(2**(1/2), 30)
1.41421356237309514547462185874
```

เป็นต้น

คำสั่ง `symbols` ในแพ็คเกจ `sympy` ใช้เพื่อกำหนดตัวแปรให้เป็นสัญลักษณ์ เช่น หากเรามีสมการ

$$u = 2x - 7y + t^2$$

และเราต้องการกำหนด  $x, y$  และ  $t$  เป็นตัวแปรด้วยกันทั้งหมด เราก็พิมพ์ว่า

```
>>> x, y, t = sym.symbols('x y t')
>>> u = 2*x - 7*y + t**2
>>> u
t**2 + 2*x - 7*y
```

เป็นต้น

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ สมการต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นมักเป็นสมการทางพีชคณิตที่มีความซับซ้อน ดังนั้น การกระจายและการจัดรวมพจน์ต่าง ๆ เข้าด้วยกันให้เป็นระเบียบจะช่วยให้สมการทางพีชคณิตนั้นดูง่ายขึ้น แพ็กเกจ `sympy` ในไพธอนมีหลายคำสั่งที่ช่วยจัดการสิ่งเหล่านี้ คำสั่งที่สำคัญ ๆ และเป็นประโยชน์ต่อการทำคณิตศาสตร์สัญลักษณ์มีดังต่อไปนี้

คำสั่ง `expand` ทำการกระจายพจน์แล้วรวมพจน์ที่กำลังเหมือนกันเข้าด้วยกัน

เช่น

$$f = (x+5)(x-3)$$

```
>>> x = sym.symbols('x')
>>> f = (x+5)*(x-3)
>>> expr = sym.expand(f)
>>> expr
x**2 + 2*x - 15
```

ซึ่งผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้ ก็คือ

$$f = x^2 + 2x - 15$$

หรืออีกตัวอย่างหนึ่ง

$$g = \cos(x+y)$$

```
>>> x, y = sym.symbols('x y')
>>> g = sym.expand(sym.cos(x+y), trig=True)
>>> g
-sin(x)*sin(y) + cos(x)*cos(y)
```

ซึ่งก็คือ

$$g = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

คำสั่ง `factor` ใช้แฟกเตอร์ฟังก์ชันออกมาเป็นผลคูณทำให้ดูง่ายขึ้น เช่น

$$h = 6x^3 + 11x^2 - 16x - 21$$

```
>>> x = sym.symbols('x')
>>> h = sym.factor(6*x**3 + 11*x**2 - 16*x - 21)
>>> h
(x + 1)*(2*x - 3)*(3*x + 7)
```

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการแฟกเตอร์ฟังก์ชันนี้ ก็คือ

$$h = (x+1)(2x-3)(3x+7)$$

คำสั่ง `simplify` ช่วยทำให้ฟังก์ชันนั้นลดรูปลงเพื่อให้ดูกระชับและง่ายขึ้น เช่น

$$u = \frac{x+2y}{\frac{2}{x} + \frac{1}{y}}$$

```
>>> x, y = sym.symbols('x y')
>>> u = sym.simplify((x + 2*y)/(2/x + 1/y))
>>> u
x*y
```

ซึ่งผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น ก็คือ

$$u = xy$$

คำสั่ง `simplify` นี้เป็นคำสั่งที่นิยมใช้มากที่สุดเพราะคำสั่งนี้ผนวกคำสั่งอื่น ๆ เข้าด้วยกัน เช่น

$$v = \frac{2x^5 - 5x^4 + 58x - 145}{2x - 5}$$

```
>>> x = sym.symbols('x')
>>> u = sym.simplify((2*x**5-5*x**4+58*x-145)/(2*x-5))
>>> u
x**4 + 29
```

ซึ่งผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น คือ

$$v = x^4 + 29$$

ไพธอนสามารถพล็อตกราฟในรูปแบบต่าง ๆ ได้หลากหลาย เช่น หากเรามีฟังก์ชัน

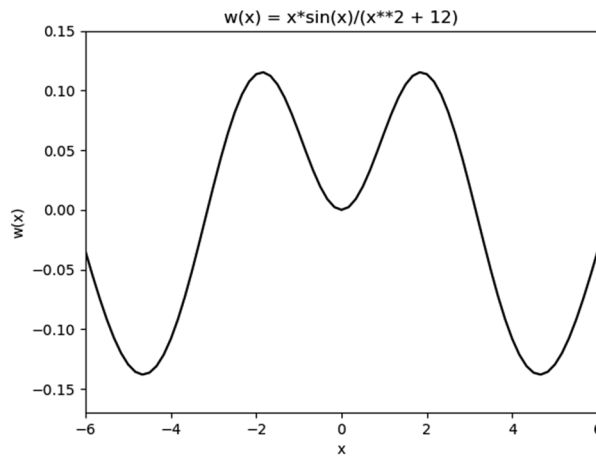
$$w = \frac{x \sin x}{x^2 + 12}$$

หาคำสั่งที่ง่าย ๆ สำหรับสร้าง  $x$ - $y$  พล็อตเพื่อพล็อตฟังก์ชัน  $w$  นี้ประกอบด้วย



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(-6, 6, 73)
w = x*np.sin(x)/(x**2 + 12)
plt.plot(x, w, 'k')
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('w(x)')
plt.xlim(-6, 6); plt.ylim(-0.17, 0.15)
plt.title('w(x) = x*sin(x)/(x**2 + 12)')
plt.show()
```

ก่อให้เกิดพล็อต ดังแสดงในรูป



หากเราต้องการเปลี่ยนเส้นกราฟสีดำไปเป็นสัญลักษณ์ของวงกลม เราก็เพียงเปลี่ยนคำสั่งสำหรับการพล็อตไปเป็น

```
plt.plot(x, w, 'ok')
```

