

สถิติศาสตร์

Introduction to Statistics



รศ. ศิริลักษณ์ สุวรรณวงศ์

สถิติศาสตร์ (Introduction to Statistics)

โดย รศ. ศิริลักษณ์ สุวรรณวงศ์

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย © พ.ศ. 2557 โดย รศ. ศิริลักษณ์ สุวรรณวงศ์
ห้ามคัดลอก ลอกเลียน ดัดแปลง ทำซ้ำ จัดพิมพ์ หรือกระทำการอื่นใด โดยวิธีการใดๆ ในรูปแบบใดๆ
ไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ เพื่อเผยแพร่ในสื่อทุกประเภท หรือเพื่อวัตถุประสงค์ใดๆ
นอกจากจะได้รับอนุญาต

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ศิริลักษณ์ สุวรรณวงศ์.

สถิติศาสตร์. -- กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดดูเคชั่น, 2557.

1. สถิติศาสตร์.

I. ชื่อเรื่อง.

310

Barcode (e-book) 9786160841776

ผลิตและจัดจำหน่ายโดย



บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน)
SE-EDUCATION PUBLIC COMPANY LIMITED

เลขที่ 1858/87-90 ถนนเทพรัตน แขวงบางนาใต้ เขตบางนา กรุงเทพฯ 10260

โทรศัพท์ 0-2739-8000

หากมีคำแนะนำหรือติชม สามารถติดต่อได้ที่ comment@se-ed.com



หนังสือ *สถิติศาสตร์* เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้เป็นตำราสำหรับผู้เรียนสถิติ ตลอดจนนักวิจัยอ่านประกอบ เพื่อให้เกิดความเข้าใจพื้นฐานของวิชาสถิติ และการนำไปประยุกต์ใช้ เนื้อหาในหนังสือมีบางส่วนมีการพิสูจน์ ทฤษฎีสถิติคณิตศาสตร์ ผู้อ่านที่ไม่สนใจจึงอาจหลีกเลี่ยงส่วนนี้ได้ เนื้อหาในแต่ละหัวข้อมีตัวอย่างประกอบ รวมทั้งได้อธิบายถึงการใช้โปรแกรม Microsoft Excel และโปรแกรม SPSS เพื่อคำนวณค่าทางสถิติ จึงทำให้ผู้อ่านสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์สถิติในการวิจัยได้ นอกจากนี้ในหนังสือยังมีแบบฝึกหัดท้ายบท พร้อมเฉลยอย่างละเอียดทุกข้อ

รศ. ศิริลักษณ์ สุวรรณวงศ์





บทที่ 1 ความน่าจะเป็น	9
1.1 ความหมายและสัญลักษณ์ความน่าจะเป็น	9
1.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับความน่าจะเป็นเบื้องต้นบางทฤษฎี	13
1.3 ความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไขและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	16
แบบฝึกหัดท้ายบท	24
บทที่ 2 ตัวแปรสุ่มและฟังก์ชันความน่าจะเป็น	29
2.1 ตัวแปรสุ่ม	29
2.2 ฟังก์ชันความน่าจะเป็น	30
2.3 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม	34
2.4 ค่าคาดหวังทางคณิตศาสตร์และความแปรปรวน	38
แบบฝึกหัดท้ายบท	43
บทที่ 3 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่สำคัญบางชนิด	49
3.1 การแจกแจงความน่าจะเป็นชนิดไม่ต่อเนื่องที่สำคัญ	49
3.1.1 การแจกแจงสมมาตร	50

3.1.2 การแจกแจงเบอร์นูลลี	51
3.1.3 การแจกแจงทวินาม	52
3.1.4 การแจกแจงปัวส์ซอง	57
3.1.5 การแจกแจงไฮเพอร์จีโอเมตริก	60
3.1.6 การแจกแจงทวินามลบ	62
3.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นชนิดต่อเนื่องที่สำคัญ	65
3.2.1 การแจกแจงสมมาตร	65
3.2.2 การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล	66
3.2.3 การแจกแจงปกติมาตรฐาน	69
3.2.4 การแจกแจงที	74
3.2.5 การแจกแจงไคกำลังสอง	79
3.2.6 การแจกแจงเอฟ	84
3.3 การประมาณการแจกแจงความน่าจะเป็น	92
3.3.1 การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปัวส์ซอง	92
3.3.2 การประมาณการแจกแจงไฮเพอร์จีโอเมตริกด้วยการแจกแจงทวินาม	94
3.3.3 การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ	95
แบบฝึกหัดท้ายบท	97

บทที่ 4 สถิติพรรณนา..... 103

4.1 การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง	103
4.1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	103
4.1.2 มัธยฐาน	109
4.1.3 ฐานนิยม	111
4.2 การวัดตำแหน่ง	113
4.3 การวัดการกระจาย	114
4.3.1 มาตรวัดการกระจายสัมบูรณ์	115
4.3.2 มาตรวัดการกระจายสัมพัทธ์	120
4.4 กราฟการกระจายของข้อมูล	121
4.4.1 แผนภูมิกล่อง	121

4.4.2 แผนภูมิลำต้น – ใบไม้	126
4.5 การใช้โปรแกรมสำเร็จรูปคำนวณค่าสถิติพรรณนา	128
4.5.1 การใช้โปรแกรม Microsoft Excel คำนวณค่าสถิติพรรณนา	128
4.5.2 การใช้โปรแกรม SPSS คำนวณค่าสถิติพรรณนา	131
แบบฝึกหัดท้ายบท	140
บทที่ 5 การประมาณค่า.....	143
5.1 ทำไมต้องสุ่มตัวอย่าง	143
5.2 การแจกแจงฟังก์ชันที่ได้จากตัวอย่างสุ่ม	144
5.3 การประมาณค่า	151
5.4 ตัวอย่างการประมาณค่าพารามิเตอร์	157
5.5 การใช้โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการประมาณค่าแบบช่วง	165
5.5.1 การใช้โปรแกรม Microsoft Excel สำหรับการประมาณ ค่าเฉลี่ยประชากร	166
5.5.2 การใช้โปรแกรม SPSS สำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร	170
แบบฝึกหัดท้ายบท	173
บทที่ 6 การทดสอบสมมติฐาน	179
6.1 ความรู้เกี่ยวกับสมมติฐาน	179
6.2 วิธีการทดสอบสมมติฐาน	183
6.3 การเลือกแบบทดสอบสมมติฐาน	184
6.3.1 การเลือกแบบทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากร 1 กลุ่ม	184
6.3.2 การเลือกแบบทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วนประชากร 1 กลุ่ม	187
6.3.3 การเลือกแบบทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแปรปรวน 1 กลุ่ม	188
6.3.4 การเลือกแบบทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างค่าเฉลี่ยประชากร 2 กลุ่ม	189

6.3.5 การเลือกแบบทดสอบเกี่ยวกับผลต่างสัดส่วนประชากร 2 กลุ่ม	192
6.3.6 การเลือกแบบทดสอบเกี่ยวกับอัตราส่วนความแปรปรวนประชากร 2 กลุ่ม	193
6.3.7 การเลือกแบบทดสอบเกี่ยวกับผลต่างค่าเฉลี่ยประชากร 2 กลุ่ม ที่ไม่เป็นอิสระ	195
6.4 ตัวอย่างการทดสอบสมมติฐาน	197
6.5 การทดสอบสมมติฐานโดยใช้ค่าพี	207
6.6 การใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทดสอบสมมติฐานทางสถิติ	211
6.6.1 การใช้โปรแกรม Microsoft Excel เพื่อการทดสอบสมมติฐาน	211
6.6.2 การใช้โปรแกรม SPSS เพื่อการทดสอบสมมติฐาน	224
แบบฝึกหัดท้ายบท	234
ภาคผนวก.....	241
ตารางสถิติ	242
แผนผังจากแนวคิดทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลาง	265
การพิสูจน์ที่เกี่ยวข้อง	266
ดัชนีคำศัพท์	272
บรรณานุกรม	275



ความน่าจะเป็น

1.1 ความหมายและลัทธิความน่าจะเป็น

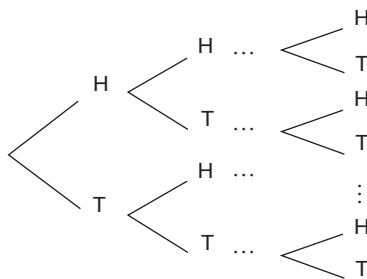
ก่อนที่จะกล่าวถึงความน่าจะเป็น จะทำการทบทวนความรู้เกี่ยวกับการนับ การนับเป็นวิธีการหาจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น หรือวิธีการของการเลือกสิ่งของ r สิ่งที่แตกต่างกันจากของ n สิ่ง เพื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) หรือจัดหมู่ (Combination) ตัวอย่างเช่น นักศึกษาหญิงคนหนึ่งมีกระโปรง 3 ตัว เสื้อ 5 ตัว นักศึกษาคนนี้มีวิธีการแต่งตัวได้กี่วิธีที่ไม่ซ้ำแบบเดิม (โดยไม่สนใจว่าสีเสื้อกับกระโปรงจะเหมาะสมกันหรือไม่) เนื่องจากกระโปรงแต่ละตัวจะหาเสื้อใส่ได้ 5 ตัว ดังนั้นกระโปรง 3 ตัวจึงมีวิธีแต่งตัวได้เท่ากับ $3 \times 5 = 15$ วิธี ถ้าเพิ่มข้อมูลได้ว่า นักศึกษาค้นดังกล่าวมีรองเท้า 2 คู่ วิธีการแต่งตัวของเขาจะเป็น $3 \times 5 \times 2 = 30$ วิธี ซึ่งการเกิดจำนวนวิธีดังกล่าวจะสอดคล้องกับกฎการนับดังต่อไปนี้

กฎที่ 1 ในการทำงานอย่างแรกมีวิธีการทำได้ n_1 วิธี ถ้าแต่ละวิธีของการทำงานอย่างแรกสามารถเลือกทำงานอย่างที่สองได้อีก n_2 วิธี จะได้ว่าวิธีการทำงานทั้งสองอย่างเท่ากับ $n_1 n_2$ วิธี

กฎที่ 2 เป็นการขยายกฎข้อที่ 1 โดยงานที่จะทำมี k งาน โดยงานอย่างแรกทำได้ n_1 วิธี ในแต่ละวิธีที่จะทำงานอย่างแรกจะเลือกทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี และในแต่ละวิธีที่ทำงานอย่างแรกและงานอย่างที่สองจะมีวิธีทำงานอย่างสามได้ n_3 วิธี เช่นนี้ไปเรื่อยๆ จำนวนวิธีที่จะทำงานทั้งหมด k งานจะเท่ากับ $n_1 n_2 \dots n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1.1 ทำการโยนเหรียญ 1 อัน k ครั้ง จะมีวิธีการเกิดหัวและก้อยกี่วิธี

วิธีทำ เมื่อโยนเหรียญครั้งแรกจะได้ผลเป็นหัวหรือก้อย เมื่อโยนเหรียญครั้งที่สองจะได้ผลเป็นหัวหรือก้อย พิจารณาจากแผนภูมิต้นไม้



จำนวนวิธีที่จะเกิดหัวหรือก้อยจะเป็น 2^k วิธี

ลองเปลี่ยนการโยนเหรียญเป็นการโยนลูกเต๋า 1 ลูก k ครั้ง จะมีวิธีการเกิดแต้มต่างๆ ของลูกเต๋าท่าเท่ากับ 6^k วิธี

กฎที่ 3 มีสิ่งของทั้งหมด n สิ่งที่แตกต่างกัน ต้องการนำมาจัดเรียงทีละ r สิ่ง (**ตำแหน่งสำคัญ**) มีวิธีการเรียงได้ทั้งหมด $\frac{n!}{(n-r)!}$ ($r \leq n$) วิธีนี้จะเรียกว่า การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

สัญลักษณ์ที่ใช้คือ $P_{n,r}$ หรือ ${}^n P_r$

ซึ่งกฎที่ 3 เกิดจากแนวคิดกฎที่ 2 โดยมองว่างานที่ต้องทำมี r งาน

งานที่ 1 คือการเรียงครั้งที่ 1 โดยมีวิธีการเรียงได้ n แบบ (เพราะมีของทั้งหมด n สิ่ง)

งานที่ 2 คือการเรียงครั้งที่ 2 โดยมีวิธีการเรียงได้ $n-1$ แบบ (เพราะมีของที่เหลือจากครั้งแรก $n-1$ สิ่ง)

งานที่ 3 คือการเรียงครั้งที่ 3 โดยมีวิธีการเรียงได้ $n - 2$ แบบ (เพราะมีของที่เหลือจากครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2 $n - 2$ สิ่ง)

⋮

งานที่ $r - 1$ คือการเรียงครั้งที่ $r - 1$ โดยมีวิธีการเรียงได้ $n - (r - 2)$ แบบ (เพราะมีของที่เหลือจากครั้งที่ 1 ครั้งที่ 2... จนถึงครั้งที่ $r - 2$ อยู่ $n - (r - 2)$ สิ่ง)

งานที่ r คือการเรียงครั้งที่ r โดยมีวิธีการเรียงได้ $n - (r - 1)$ แบบ (เพราะมีของที่เหลือจากครั้งที่ 1 ครั้งที่ 2... จนถึงครั้งที่ $r - 1$ อยู่ $n - (r - 1)$ สิ่ง)

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะทำงานทั้ง r งานได้เท่ากับ $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (r - 2))(n - (r - 1))$ วิธี

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (r - 2))(n - (r - 1)) = \frac{n!}{(n - r)!} = {}^n P_r$$

กฎที่ 4 ถ้ามีของ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งเหมือนกัน n_2 สิ่งเหมือนกัน ... มี n_k สิ่งเหมือนกัน ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) วิธีการเรียงของทั้ง n สิ่ง เท่ากับ $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ วิธี (ตำแหน่งยังสำคัญ)

กฎที่ 5 ถ้าต้องการเรียงของ n สิ่งที่แตกต่างกันหมดให้เป็นวงกลม จำนวนวิธีเรียงเท่ากับ $(n - 1)!$ วิธี

หมายเหตุ : กฎที่ 3 และกฎที่ 4 เป็นการเรียงในรูปเส้นตรง

กฎที่ 6 มีของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ต้องการเลือกหมู่ทีละ r สิ่ง (ตำแหน่งไม่สำคัญ) จะมีวิธีการเลือกหมู่ได้ทั้งหมด $\frac{n!}{(n - r)!r!}$ ($r \leq n$) วิธี ซึ่งจะเรียกว่า **การเลือกหมู่หรือการจัดหมู่ (Combination)** สัญลักษณ์ที่ใช้คือ $C_{n, r}$ หรือ ${}^n C_r$ หรือ $\binom{n}{r}$

ตัวอย่างที่ 1.2 จากผู้สมัคร 8 คน ต้องการเลือกคณะกรรมการ 3 คน จงหาจำนวนวิธีการเลือกคณะกรรมการ 3 คน

1. ถ้าไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

2. คณะกรรมการ 3 คน ประกอบด้วยประธาน 1 คน รองประธานคนที่ 1 และรองประธานคนที่ 2

วิธีทำ

1. ในกรณีที่ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม หมายถึงว่าทั้ง 3 คนที่ถูกเลือกเป็นกรรมการมีหน้าที่เหมือนกัน ดังนั้นตำแหน่งไม่สำคัญจึงใช้กฎที่ 6 ได้ว่า มีคน 8 คน ต้องการเลือกมา 3 คน วิธีการเลือกจะทำได้ $\binom{8}{3}$ วิธี
2. มีเงื่อนไขว่าหน้าที่กรรมการที่เลือกทั้ง 3 คนมีความแตกต่างกัน ดังนั้นตำแหน่งมีความสำคัญจึงใช้กฎที่ 3 ได้ว่า วิธีการจัดเรียงเท่ากับ 8P_3 วิธี

นิยามที่ 1.1 การทดลองสุ่ม (Random Trial) หมายถึงการทดลองหรือการกระทำใดๆ ที่ไม่ทราบว่าจะเกิดผลลัพธ์ใด จนกระทั่งการทดลองเสร็จสิ้น แต่ทราบผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด เช่น การโยนเหรียญ เป็นการทดลองสุ่ม เพราะไม่อาจทราบได้ว่าด้านใดของเหรียญจะปรากฏ แต่ทราบว่าไม่เกิดด้านหัวก็จะเกิดด้านก้อย

นิยามที่ 1.2 ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space) หมายถึงเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม

ตัวอย่างที่ 1.3

การทดลองสุ่ม	สิ่งที่สนใจ	ปริภูมิตัวอย่าง
โยนลูกเต๋า 1 ลูก	แต้มที่ปรากฏ	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
โยนลูกเต๋า 2 ลูก	ผลรวมของแต้มที่ปรากฏ	$S = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$
ซื้อหลอดไฟฟ้า	อายุการใช้งาน	$S = \{t \mid t \geq 0\}$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนปริภูมิตัวอย่างคือ S และสมาชิกตัวหนึ่งหนึ่งของปริภูมิตัวอย่างเรียกว่า **จุดตัวอย่าง (Sample Point)** ปริภูมิตัวอย่างแบ่งเป็น 2 ประเภทคือ ปริภูมิชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete Sample Space) ซึ่งหมายถึง ปริภูมิตัวอย่างที่จุดตัวอย่างมีค่าไม่ต่อเนื่อง เช่น แด้มที่ปรากฏจากการโยนลูกเต๋า 1 ลูก อีกประเภทคือ ปริภูมิชนิดต่อเนื่อง (Continuous Sample Space) หมายถึงปริภูมิตัวอย่างที่จุดตัวอย่างมีค่าต่อเนื่อง เช่น อายุการใช้งานหลอดไฟฟ้า

นิยามที่ 1.3 เหตุการณ์ (Event) หมายถึงเซตย่อยของปริภูมิตัวอย่าง

นิยามที่ 1.4 ความน่าจะเป็น (Probability) หมายถึงโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์หนึ่งๆ ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วย $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

เมื่อ $n(A)$ คือจำนวนจุดตัวอย่างของเหตุการณ์ A

$n(S)$ คือจำนวนจุดตัวอย่างของปริภูมิตัวอย่าง

ข้อสังเกต $n(A)$ และ $n(S)$ ที่สนใจศึกษามักจะเป็น Discrete Sample Space สำหรับความน่าจะเป็นนอกจากจะนิยามจากนิยามที่ 1.4 อาจให้นิยามจากความถี่สัมพัทธ์ (Relative Frequency) ของเหตุการณ์หนึ่งๆ เมื่อ n แทนจำนวนครั้งของการเกิดเหตุการณ์ และ N แทนความถี่รวมทั้งหมด โดยที่ N ต้องมีค่ามากพอ จะได้ว่า $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$

สัจพจน์ความน่าจะเป็น (Postulates of Probability)

1. $P(S) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. ถ้า $E_1, E_2, \dots$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกกันเป็นคู่ (Pairwise Disjoint Event) แล้ว

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

1.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับความน่าจะเป็นเบื้องต้นบางทฤษฎี

กำหนดให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง A, B, C, E เป็นเหตุการณ์ใดๆ

ทฤษฎีที่ 1.1 $P(\phi) = 0$

พิสูจน์ จาก $S \cap \phi = \phi$ และ $S \cup \phi = S$

$$P(S \cup \phi) = P(S)$$

$P(S) + P(\phi) = P(S)$ เพราะ S, ϕ เป็นเซตที่ไม่เกิดร่วมกัน (Disjoint Set)

$$P(\phi) = 0$$

ทฤษฎีที่ 1.2 $P(A') = 1 - P(A)$

พิสูจน์ จาก $A \cap A' = \phi$ และ $A \cup A' = S$

$$P(A \cup A') = S$$

$P(A) + P(A') = 1$ เพราะ A, A' เป็นเซตที่ไม่เกิดร่วมกัน

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ทฤษฎีที่ 1.3 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

พิสูจน์ $B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \quad \dots \text{สมการที่ (1)}$$

เนื่องจาก $A \cup B = A \cup (A' \cap B)$

ดังนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(A' \cap B)$

เพราะ $A, (A' \cap B)$ เป็นเซตที่ไม่เกิดร่วมกัน

$$P(A' \cap B) = P(A \cup B) - P(A)$$

จากสมการที่ (1) แทนค่า $P(A' \cap B)$ ได้ว่า

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B) - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ตัวอย่างที่ 1.4 ในฤดูหนาวการติดเครื่องยนต์ของรถยนต์จะยาก แดงมีรถยนต์ 2 คัน ความน่าจะเป็นที่เขาจะติดเครื่องยนต์ของรถยนต์คันแรกติดตั้งแต่ครั้งแรกเท่ากับ 0.8 ความน่าจะเป็นที่เขาจะติดเครื่องยนต์ของรถยนต์คันที่สองติดตั้งแต่ครั้งแรกเท่ากับ 0.4 และความน่าจะเป็นที่เขาจะติดเครื่องยนต์ของรถยนต์ทั้งสองตั้งแต่ครั้งแรกเท่ากับ 0.3 จงหาความน่าจะเป็นที่

1. เขาติดเครื่องยนต์ของรถยนต์ทั้งสองคันไม่ติดตั้งแต่ครั้งแรก
2. เขาติดเครื่องยนต์ของรถยนต์อย่างน้อยที่สุด 1 คันตั้งแต่ครั้งแรก

วิธีทำ

กำหนดให้ A แทนการติดเครื่องครั้งแรกของรถยนต์คันที่ 1

B แทนการติดเครื่องครั้งแรกของรถยนต์คันที่ 2

$$P(A) = 0.8 \quad P(B) = 0.4 \quad \text{และ} \quad P(A \cap B) = 0.3$$

1. ต้องการหา $P(A' \cap B')$

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P(A \cup B)' \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - [0.8 + 0.4 - 0.3] \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

2. ต้องการหา $P(A \cup B)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.8 + 0.4 - 0.3 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาความน่าจะเป็นที่คน n คน ($n < 365$) จะมีวันที่เกิดไม่ตรงกัน (วันที่เกิดตรงกันหมายถึง เกิดวันที่และเดือนเดียวกัน)

วิธีทำ คนแต่ละคนจะเกิดในวันใดวันหนึ่งใน 365 วัน

จำนวนวิธีที่คน n คนจะเกิดได้ทั้งหมดเท่ากับ 365^n วิธี

วิธีคิด คน n คนที่จะมีวันเกิดไม่ตรงกันคือ คนที่ 1 มีวันที่เกิดได้ 365 วัน คนที่ 2 มีวันเกิดได้ 364 วัน (เพราะวันเกิดห้ามตรงกับคนแรก) คนที่ 3 มีวันเกิดได้ 363 วัน ด้วยวิธีคิดเช่นเดียวกัน ดังนั้นคนที่ n มีวันเกิดได้เท่ากับ $365 - n + 1$

ดังนั้นจำนวนวิธีที่คน n คนจะมีวันเกิดไม่ตรงกันเท่ากับ $365(364)(363) \dots (365 - n + 1) = {}^{365}P_n$ วิธี

ความน่าจะเป็นที่คน n คน ($n < 365$) จะมีวันเกิดไม่ตรงกัน เท่ากับ $\frac{{}^{365}P_n}{365^n}$

1.3 ความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไขและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

พิจารณาข้อมูลนักศึกษาในตารางต่อไปนี้

ภูมิภาค	เพศหญิง	เพศชาย	รวม
ต่างจังหวัด	450	150	600
กรุงเทพมหานคร	300	100	400
รวม	750	250	1,000

จากข้อมูลต้องการหาความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้

1. นักศึกษาหญิง (A)
2. นักศึกษาที่มีภูมิลำเนาต่างจังหวัด (B)
3. นักศึกษาหญิง และมีภูมิลำเนาต่างจังหวัด ($A \cap B$)

$$1. \text{ ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้นักศึกษาหญิง } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{750}{1,000} = 0.75$$

2. ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้นักศึกษาที่มีภูมิลำเนาต่างจังหวัด

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{600}{1,000} = 0.60$$

3. ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้นักศึกษาหญิง และมีภูมิลำเนาต่างจังหวัด

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{450}{1,000} = 0.45$$

ถ้าในการสุ่มนักศึกษากลุ่มดังกล่าวมา 1 คน พบว่านักศึกษาเป็นเพศหญิง ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาคนดังกล่าวเป็นนักศึกษาที่มีภูมิลำเนาต่างจังหวัด ความน่าจะเป็นที่ต้องการหาครั้งนี้จะเป็นลักษณะความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไข กล่าวคือ เราทราบก่อนแล้วว่านักศึกษาเป็นหญิง แล้ว

จึงหาโอกาสที่นักศึกษาหญิงคนนี้เป็นนักศึกษาที่มีภูมิลำเนาต่างจังหวัด ดังนั้นปริภูมิที่มองจะไม่ใช่ นักศึกษาทั้ง 1,000 คน แต่เป็นเพียง 750 คน และในจำนวนนักศึกษาหญิง 750 คน จะมีโอกาส เป็นนักศึกษาที่มีภูมิลำเนาต่างจังหวัดเท่ากับ $\frac{450}{750} = 0.6$

นิยามที่ 1.5 กำหนดให้ A, B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ที่ $P(B) > 0$ ความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไข ของเหตุการณ์ A เมื่อกำหนดเหตุการณ์ B เขียนแทนด้วย $P(A | B)$ โดย $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

ทฤษฎีที่ 1.4 $P(S | B) = 1$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์} \quad \text{จาก} \quad P(S | B) &= \frac{P(S \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B)}{P(B)} \quad \text{เพราะ } S \cap B = B \\ &= 1 \end{aligned}$$

ทฤษฎีที่ 1.5 $P(B | B) = 1$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์} \quad \text{จาก} \quad P(B | B) &= \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ทฤษฎีที่ 1.6 $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 \cap A_2 | B)$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์} \quad P(A_1 \cup A_2 | B) &= \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\ &\quad - \frac{P[(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B)]}{P(B)} \\ &= P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 \cap A_2 | B) \end{aligned}$$

ทฤษฎีที่ 1.7 $P(A' | B) = 1 - P(A | B)$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์} \quad P(A' | B) &= \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P[(S - A) \cap B]}{P(B)} \\ &= \frac{P(S \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= 1 - P(A | B) \end{aligned}$$

ข้อสังเกต $P(A | B') \neq 1 - P(A | B)$

นิยามที่ 1.6 เซตแบ่งส่วน (Partition Set) B_i จะเป็นเซตแบ่งส่วนเมื่อ

1. $B_i \cap B_j = \phi$ ทุกค่า $i \neq j$
2. $\bigcup_{i=1}^n B_i = S$
3. $P(B_i) > 0$ ทุกค่า i

ทฤษฎีที่ 1.8 ให้ B_i เป็นเซตแบ่งส่วนที่ $B_i \subseteq S$ และ $A \subseteq S$

$$\text{แล้ว } P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)$$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์} \quad P(A) &= P(A \cap S) \\ &= P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) \quad \text{เพราะ } B_i \cap B_j = \phi \\ &= \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i) \end{aligned}$$

ทฤษฎีที่ 1.9 (Bayes' Theorem) ภายใต้ง่อนไข B_i เป็นเซตแบ่งส่วนที่ $B_i \subseteq S$ และ

$$A \subseteq S \text{ โดยที่ } P(A) > 0 \text{ แล้ว } P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A | B_j)P(B_j)}$$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์} \quad P(B_i | A) &= \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A | B_j)P(B_j)} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{จากนิยามที่ 1.5} \\ \text{และทฤษฎีที่ 1.8} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 1.6 โรงงานแห่งหนึ่งมีเครื่องจักรการผลิต 3 เครื่อง โดยความน่าจะเป็นที่เครื่องจักรแต่ละเครื่องผลิตสินค้าเป็น 0.2, 0.3 และ 0.5 ตามลำดับ ถ้าเครื่องจักรเครื่องที่ 1 ผลิตสินค้าจะเกิดสินค้าชำรุด 0.1 ส่วนเครื่องจักรเครื่องที่ 2 และเครื่องที่ 3 ผลิตสินค้าจะเกิดสินค้าชำรุด 0.05 และ 0.02 ตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิด

1. สินค้าชำรุด
2. ถ้าพบสินค้าชำรุด แล้วความน่าจะเป็นที่จะเป็นสินค้าที่ผลิตจากเครื่องจักรเครื่องที่ 1

วิธีทำ กำหนดให้ E_1 , E_2 และ E_3 แทนเหตุการณ์เครื่องจักรเครื่องที่ 1, 2 และ 3 ผลิตสินค้าตามลำดับ L แทนเหตุการณ์ที่ได้สินค้าชำรุด

$$\text{จากโจทย์ } P(E_1) = 0.2 \quad P(E_2) = 0.3 \quad P(E_3) = 0.5$$

$$P(L | E_1) = 0.1 \quad P(L | E_2) = 0.05 \quad P(L | E_3) = 0.02$$

ต้องการหา 1. $P(L)$

$$2. P(E_1 | L)$$

1. จากกำหนดให้เซตแบ่งส่วนเกิดจากเครื่องจักรและจากทฤษฎีที่ 1.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 P(L) &= \sum_{i=1}^3 P(L | E_i) P(E_i) \\
 &= P(L | E_1)P(E_1) + P(L | E_2) P(E_2) + P(L | E_3)P(E_3) \\
 &= 0.1(0.2) + 0.05(0.3) + 0.02(0.5) \\
 &= 0.045
 \end{aligned}$$

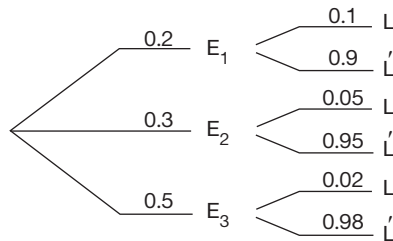
ความน่าจะเป็นที่จะเกิดสินค้าชำรุด เท่ากับ 0.045

2. จากทฤษฎีที่ 1.9 (Bayes' Theorem)

$$\begin{aligned}
 P(E_1 | L) &= \frac{P(L | E_1)P(E_1)}{P(L)} \\
 &= \frac{0.1(0.2)}{0.045} = 0.44
 \end{aligned}$$

ถ้าพบสินค้าชำรุดแล้วความน่าจะเป็นที่จะเป็นสินค้าที่ผลิตจากเครื่องจักรเครื่องที่ 1 เท่ากับ 0.44

จากโจทย์พิจารณาจากแผนภูมิต้นไม้ (Tree Diagram)



สินค้าชำรุดเกิดจากการผลิตเนื่องจากเครื่องจักรเครื่องที่ 1, 2 และ 3 ด้วยความน่าจะเป็น 0.1 0.05 และ 0.02 ตามลำดับ แต่เครื่องจักรแต่ละเครื่องมีโอกาที่จะผลิตสินค้าเท่ากับ 0.2, 0.3 และ 0.5 ตามลำดับ ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะเกิดสินค้าชำรุด $P(L)$ มีค่าเป็น

$$\begin{aligned}
 P(L) &= 0.1(0.2) + 0.05(0.3) + 0.02(0.5) \\
 &= 0.045
 \end{aligned}$$

ส่วนความน่าจะเป็นที่สินค้าจะผลิตจากเครื่องจักรเครื่องที่ 1 ถ้าพบว่าสินค้านี้ด่างกล่าวซ้ำชุด

$$P(E_1 | L) = \frac{0.1(0.2)}{0.045}$$

$$= 0.44$$

ลองพิจารณาทารางความน่าจะเป็นต่อไปนี้

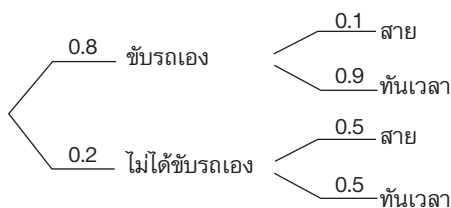
เครื่องจักรที่	$P(E_i)$	$P(L E_i)$	$P(E_i)P(L E_i)$	$P(E_i L)$
1	0.2	0.1	0.02	$\frac{0.02}{0.045} = 0.45$
2	0.3	0.05	0.015	$\frac{0.015}{0.045} = 0.33$
3	0.5	0.02	0.01	$\frac{0.01}{0.045} = 0.22$
รวม	1.0	–	0.045	1.00

ตัวอย่างที่ 1.7 ความน่าจะเป็นของชายคนหนึ่งซึ่งขับรถไปทำงานเองเท่ากับ 0.8 ถ้าเขาขับรถไปทำงานเองแล้วความน่าจะเป็นที่เขาจะไปทำงานสาย 0.1 แต่ถ้าเขาไม่ได้ขับรถไปทำงานเองแล้วความน่าจะเป็นที่เขาจะไปทำงานสาย 0.5 จงหา

1. ความน่าจะเป็นที่เขาจะไปทำงานสาย
2. ถ้าเขาไปทำงานสาย แล้วความน่าจะเป็นที่เขาไม่ได้ขับรถไปทำงานเองเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

จากโจทย์พิจารณาแผนภูมิต้นไม้



$$1. P(\text{ไปทำงานสาย}) = 0.8 (0.1) + 0.2 (0.5) \\ = 0.18$$

$$2. P(\text{ไม่ได้ขับรถ} | \text{ไปทำงานสาย}) = \frac{0.2(0.5)}{0.18} \\ = \frac{10}{18} \\ = 0.5556$$

ผู้อ่านลองสร้างตารางความน่าจะเป็นจากโจทย์ที่กำหนดให้ และหาค่าความน่าจะเป็นจากตารางที่สร้างเปรียบเทียบกับวิธีที่ได้จากแผนผังต้นไม้

นิยามที่ 1.7 เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน (Stochastically Independent Event) ก็ต่อเมื่อ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ข้อสังเกต ถ้าเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน $A \cap B = \phi$ ดังนั้น $P(A \cap B) = 0$ เหตุการณ์ที่เป็นอิสระกับเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันไม่ใช่สิ่งเดียวกัน ตัวอย่างทำการโยนเหรียญ 1 อัน เหตุการณ์เกิดหัวและเหตุการณ์เกิดก้อยเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน เพราะเป็นไปไม่ได้ที่หน้าหัวและหน้าก้อยจะเกิดขึ้นพร้อมกัน ส่วนตัวอย่างเหตุการณ์ที่อิสระกัน เช่น โยนเหรียญครั้งแรกเกิดหัว ในการโยนครั้งที่ 2 เหรียญอาจเกิดหัวหรือก้อยก็ได้ เหตุการณ์ดังกล่าวถือว่าเป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระ เป็นที่น่าสังเกตอีกอย่างคือ เหตุการณ์ที่เป็นอิสระมักเกิดจากการทดลองสุ่มตั้งแต่ 2 ครั้ง แต่เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันเป็นผลที่เกิดจากการทดลองสุ่มครั้งเดียว

จากนิยามที่ 1.7 ถ้าเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน เราจะได้ว่า

$$1. P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$$

$$2. P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B)$$

$$3. P(A | B) = P(A)$$

ตัวอย่างที่ 1.8 โรงพยาบาลแห่งหนึ่งจะส่งยาจากบริษัทผู้ผลิต 2 บริษัทคือ A กับ B ถ้าผู้ผลิตทั้งสองไม่สามารถส่งยาได้ภายใน 4 วันหลังจากสั่งยาแล้ว จะทำให้งานวิจัย ณ โรงพยาบาลต้องหยุดชะงักจนกระทั่งได้รับยาจากบริษัทใดบริษัทหนึ่ง ถ้าความน่าจะเป็นที่บริษัท A จะส่งยาได้ภายใน 4 วันเท่ากับ 0.55 ส่วนบริษัท B เท่ากับ 0.35 จงหา

1. ความน่าจะเป็นที่ทั้งบริษัท A และ B จะส่งยาได้ภายใน 4 วัน
2. ความน่าจะเป็นที่มีอย่างน้อย 1 บริษัทจะส่งยาได้ภายใน 4 วัน
3. ความน่าจะเป็นที่งานวิจัยจะหยุดชะงักเนื่องจากบริษัทยาไม่สามารถส่งยาให้ได้ภายใน 4 วัน

วิธีทำ กำหนดให้ A แทนบริษัท A จะส่งยาได้ภายใน 4 วัน

B แทนบริษัท B จะส่งยาได้ภายใน 4 วัน

$$P(A) = 0.55 \quad P(B) = 0.35$$

1. ความน่าจะเป็นที่ทั้งบริษัท A และ B จะส่งยาได้ภายใน 4 วัน เนื่องจากการทำงานทั้งสองบริษัทเป็นอิสระกัน ดังนั้น $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.1925$

2. ความน่าจะเป็นที่มีอย่างน้อย 1 บริษัทจะส่งยาได้ภายใน 4 วัน

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.55 + 0.35 - 0.1925 \\ &= 0.7075 \end{aligned}$$

3. ความน่าจะเป็นที่งานวิจัยจะหยุดชะงัก เนื่องจากบริษัทยาไม่สามารถส่งยาให้ได้ภายใน 4 วัน

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P(A \cup B)' \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - 0.7075 = 0.2925 \end{aligned}$$



แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ต้องการนำเลข 0, 2, 4, 6, 8 มาเรียงเป็นเลข 4 หลัก จงหาจำนวนวิธีที่จะสร้างเลขดังกล่าวได้ ถ้า
 - 1.1 ไม่ให้มีการใช้เลขตัวใดซ้ำกัน
 - 1.2 ใช้ตัวเลขซ้ำกันได้
2. ภาวะเศรษฐกิจการตลาดมี 3 ลักษณะคือ ภาวะเศรษฐกิจจะดีขึ้น ถดถอย หรือเท่าเดิม นักวิเคราะห์การตลาดพยากรณ์ว่า ภาวะเศรษฐกิจจะดีขึ้น ถดถอย หรือเท่าเดิม ด้วยความน่าจะเป็น 0.2, 0.6 และ 0.3 ตามลำดับ จงพิจารณาว่าความน่าจะเป็นที่หาได้สมเหตุผลหรือไม่ จงอธิบาย
3. ทำการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 4 ครั้ง กำหนดให้ A แทนเหตุการณ์ขึ้นหัวอย่างน้อยที่สุด 3 ครั้ง B แทนเหตุการณ์ขึ้นหัวอย่างน้อยที่สุด 2 ครั้ง C แทนเหตุการณ์ขึ้นหัว 1 ครั้ง D แทนเหตุการณ์การโยนครั้งที่ 3 และขึ้นหัว จงหาค่าของ $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap D)$, $P(D)$
4. n เป็นจำนวนเต็ม $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n P(n)$ แทนค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิด n ให้ $A = \{n : 1 \leq n \leq 10\}$ $B = \{n : 1 \leq n \leq 20\}$ และ $C = \{n : 11 \leq n \leq 20\}$ จงหา $P(A)$, $P(B)$, $P(B')$, $P(C)$, $P(A \cup B)$
5. กล่องใบหนึ่งมีสลากหมายเลข 1, 2, 3, ..., n ทำการสุ่มสลาก 2 ใบแบบไม่แทนที่ จงหาความน่าจะเป็นที่สลากที่สุ่มได้จะเป็นหมายเลขที่เรียงกัน

6. ถ้า A, B และ C เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ $P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0$ และ $P(C \cap A) = \frac{1}{8}$ จงหาค่า $P(A \cup B \cup C)$
7. ในการศึกษาผลกระทบของผู้ป่วยโรคมะเร็งที่ได้รับการรักษาด้วยยาชนิดหนึ่งจำนวน 250 คน ซึ่งจะมีอาการคันตาหรือมีผื่นขึ้นเมื่อได้รับยาตัวใหม่ พบว่าผู้ป่วย 90 คนจะมีอาการคันตา อีก 135 คนมีผื่นขึ้น ส่วนผู้ป่วยจำนวน 45 คน มีอาการทั้งสองอย่าง จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยที่ได้รับยาดังกล่าวแล้วมีอาการอย่างน้อยที่สุด 1 อาการจาก 2 อาการดังกล่าว
8. ความน่าจะเป็นที่คนป่วยไปพบทันตแพทย์จะถูกถอนฟันเท่ากับ 0.06 โอกาสที่เขาถูกอุดฟันเท่ากับ 0.20 และความน่าจะเป็นที่เขาจะถูกถอนฟันและอุดฟันเท่ากับ 0.03 จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะถูกอุดฟัน หรือถอนฟันอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว
9. ถ้าความน่าจะเป็นที่คนอายุ 20 ปีมีอายุยืนยาวไปได้ถึง 70 ปีเท่ากับ 0.7 A และ B เป็นเพื่อนกัน ปัจจุบันเขาทั้งสองคนมีอายุ 20 ปี จงหาความน่าจะเป็นที่
- 9.1 ทั้งสองคนมีอายุยืนยาวถึง 70 ปี
- 9.2 อย่างน้อยคนใดคนหนึ่งจะมีอายุยืนยาวถึง 70 ปี
10. ในการเดินทางไปเมืองหนึ่งด้วยสายการบิน X และเดินทางกลับด้วยสายการบิน Y ให้ A แทนเหตุการณ์ที่กระเป๋าสuitcaseหายเมื่อเดินทางด้วยสายการบิน X และ B แทนเหตุการณ์ที่กระเป๋าสuitcaseหายเมื่อเดินทางด้วยสายการบิน Y ถ้า A และ B เป็นอิสระต่อกันโดย $P(A) > P(B)$, $P(A \cap B) = 0.0012$ และ $P(A \cup B) = 0.0788$ จงหา $P(A)$ และ $P(B)$
11. จากการศึกษาความสัมพันธ์ของความสามารถทางคณิตศาสตร์และความสนใจทางสถิติพบว่า

ความสามารถทางคณิตศาสตร์	ความสนใจทางสถิติ			รวม
	ต่ำ	ปานกลาง	สูง	
ต่ำ	40	9	11	60
ปานกลาง	15	16	19	50
สูง	6	10	25	41
รวม	61	35	55	151

- 11.1 จงหาความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้นักศึกษาที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ และความสนใจทางสถิติต่ำ
- 11.2 ถ้าสุ่มได้นักศึกษาที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะสนใจทางสถิติต่ำ
- 11.3 ถ้าสุ่มได้นักศึกษาที่มีความสนใจทางสถิติปานกลาง ความน่าจะเป็นที่เขาจะมีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูงเท่ากับเท่าใด
12. ผู้ป่วยใช้หวัดจะมีวิธีเลือกการรักษา 3 วิธีคือ ปล่อยให้หายเอง ซื้อยากินเอง หรือไปพบแพทย์ ถ้าความน่าจะเป็นของแต่ละวิธีเท่ากับ 0.3, 0.6 และ 0.1 ตามลำดับ และพบว่าความน่าจะเป็นที่เขาจะหายป่วยภายใน 1 สัปดาห์ถ้าเขาไปพบแพทย์เท่ากับ 0.8 แต่ถ้าเขาปล่อยให้หายเองเขาจะหายป่วยภายใน 1 สัปดาห์ด้วยความน่าจะเป็น 0.2 และถ้าเขาซื้อยากินเองเขาจะหายป่วยภายใน 1 สัปดาห์ด้วยความน่าจะเป็น 0.5
 - 12.1 จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะหายป่วยภายใน 1 สัปดาห์
 - 12.2 ถ้าเขาหายป่วยภายใน 1 สัปดาห์ จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะซื้อยากินเอง
13. กำหนดให้ $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.45$ และ $P(A \cap B) = 0.30$ จงหาค่า $P(A \cup B)$, $P(A | B)$, $P(B | A)$ และพิจารณาว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกันหรือไม่
14. สมมติว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน โดย $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$
 - 14.1 จงหาค่า $P(A \cap B)$ และ $P(A | B)$
 - 14.2 ท่านเห็นด้วยกับคำกล่าวที่ว่า “ถ้าเหตุการณ์ใดเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้วเหตุการณ์คู่ดังกล่าวจะเป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน” หรือไม่ เพราะเหตุใด จงใช้ข้อมูลที่กำหนดให้สนับสนุนความคิดเห็นของท่าน
15. กล่องใบที่ 1 บรรจุลูกบอลสีขาว 2 ลูก และสีดำ 3 ลูก กล่องใบที่ 2 บรรจุลูกบอลสีขาว 4 ลูก และสีดำ 1 ลูก สุ่มกล่องมา 1 ใบ และสุ่มหยิบลูกบอล 1 ลูกจากกล่องดังกล่าว ถ้าสุ่มได้ลูกบอลสีขาว จงหาความน่าจะเป็นที่กล่องใบที่ 1 ถูกสุ่มได้

16. ในเมืองแห่งหนึ่ง 60% ของผู้ขับขี่รถยนต์มีอายุตั้งแต่ 30 ปีขึ้นไป และ 40% เป็นผู้ที่มีอายุต่ำกว่า 30 ปี 4% ของผู้ขับขี่รถยนต์ที่มีอายุตั้งแต่ 30 ปีขึ้นไป ประสบอุบัติเหตุที่รุนแรงในรอบ 1 ปี ส่วนผู้ขับขี่รถยนต์ที่มีอายุต่ำกว่า 30 ปีจะมีถึง 10% ที่ประสบอุบัติเหตุที่รุนแรงในรอบ 1 ปี ถ้าพบอุบัติเหตุที่รุนแรง จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ขับขี่เป็นผู้ที่มีอายุต่ำกว่า 30 ปี