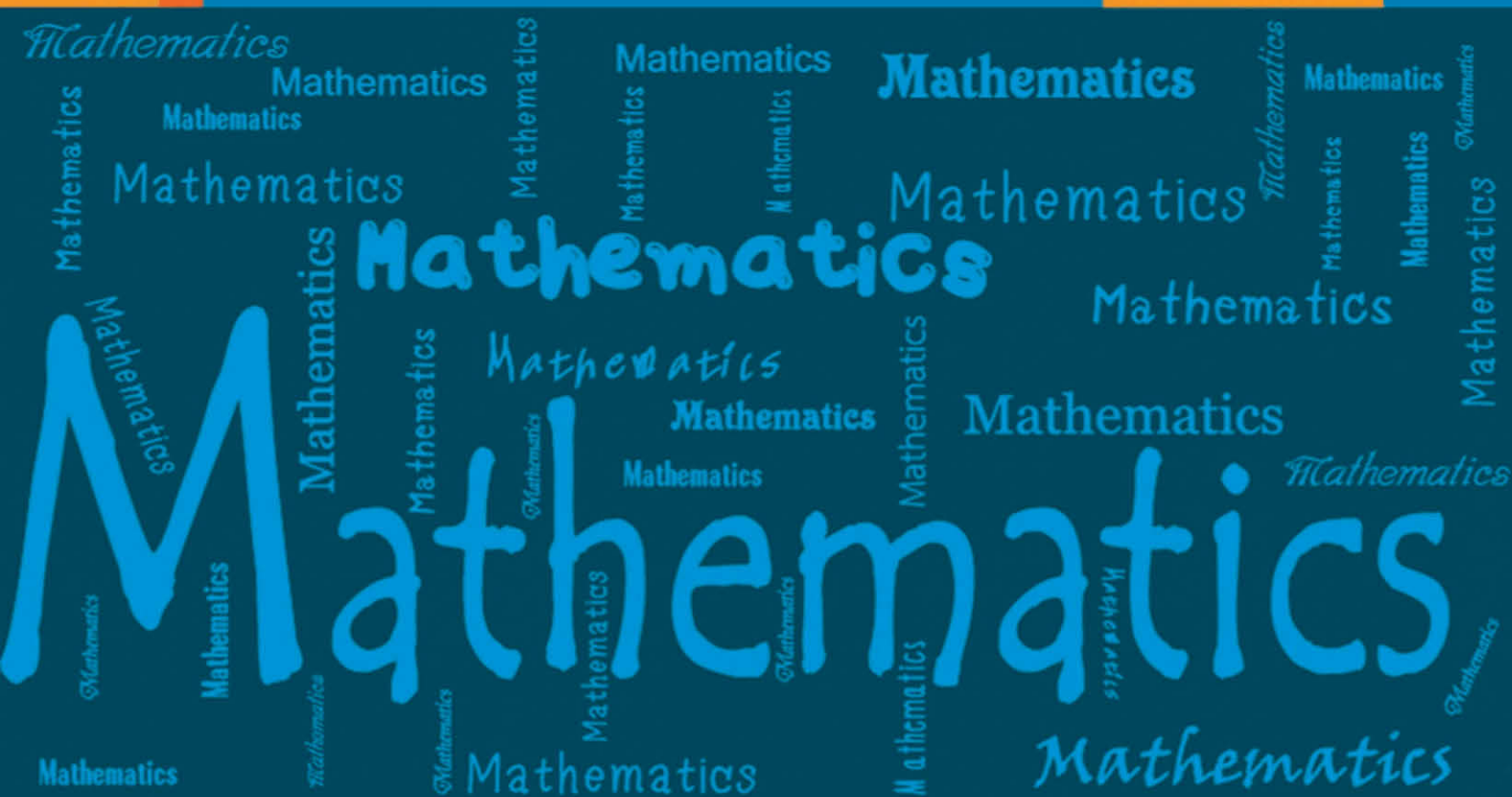




คณิตศาสตร์ MATHEMATICS

I



ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพิศ ฤทธิแก้ว

คณิตศาสตร์ 1

MAT-107

(พิมพ์ครั้งที่4 พ.ศ.2556)

ชื่อหนังสือ

คณิตศาสตร์ 1

ISBN

974-8275-50-7

ผู้จัดพิมพ์

ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์
222 ตำบลไทยบุรี อำเภอท่าศาลา
จังหวัดนครศรีธรรมราช 80161
โทรศัพท์ 0 7567 3648-50
โทรสาร 0 7567 3651

ปีที่พิมพ์

เมษายน 2556

จำนวนพิมพ์

500 เล่ม
(สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ)

สถานที่พิมพ์

ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์

คำนำ (พิมพ์ครั้งที่ 1)

ตำราเล่มนี้เขียนขึ้นโดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อใช้เป็นตำราประกอบการสอนรายวิชาแคลคูลัส 1 สำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 1 ของมหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ ที่สังกัดสำนักวิชาเทคโนโลยีการเกษตร สำนักวิชาเทคโนโลยีอุตสาหกรรมและทรัพยากร สำนักวิชาวิทยาการจัดการ และสำนักวิชาสหเวชศาสตร์และสาธารณสุขศาสตร์ ผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 7 บท สามบทแรกประกอบด้วยเรื่อง ลิมิต ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการประยุกต์ ซึ่งเรื่องเหล่านี้ได้มีการกล่าวไว้บ้างแล้ว ในหลักสูตรคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลายในตำรานี้ได้เพิ่มเติมรายละเอียดเข้าไป เพื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสทบทวนและศึกษาเนื้อหาในทางลึก สืบบทหลังเป็นเรื่อง ปริพันธ์ อนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันอดิคัย เทคนิคการหาปริพันธ์ และปริพันธ์ไม่ตรงแบบในแต่ละบทผู้เขียนได้แทรกแบบฝึกหัดไว้ และได้เฉลยคำตอบพิมพ์รวมไว้ท้ายเล่ม

อนึ่ง ในการเรียบเรียงตำราเล่มนี้ ผู้เขียนประสงค์ให้ผู้เรียนทำความเข้าใจได้ก่อนในระดับพื้นฐานจึงไม่ได้มุ่งเน้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทว่าดำเนินการอย่างไร ดังนั้นจึงเลือกพิสูจน์บางทฤษฎีบทที่เห็นว่าสำคัญและเป็นแนวทางสำหรับการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูงต่อไป การใช้ศัพท์เทคนิคในตำราเล่มนี้ผู้เขียนยึดหนังสือศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน 2538 เป็นหลัก

ผู้เขียนกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รจิต วัฒนสินธุ์ รองศาสตราจารย์ ดร.สุภา สุจริตพงศ์ รองศาสตราจารย์ ดร.ยุพาภรณ์ เข้มประสิทธิ์ และคณาจารย์ทุกท่านในภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้ประสาทวิชาแก่ผู้เขียน ขอขอบคุณ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ ที่ให้การสนับสนุน ขอขอบคุณ อาจารย์สุชลา ชูแสง ซึ่งร่วมกับ อาจารย์เซาพี บุญมัญญ กรณาพิสุน์อักษรให้ตลอดทั้งเล่ม ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ อรรถจัน บัณฑิตย ที่ให้การช่วยเหลืออย่างดียิ่งทุกขั้นตอนในการจัดพิมพ์ตำราเล่มนี้

ท้ายที่สุด ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ศูนย์บรรณสารและสื่อการศึกษาทุกท่านโดยเฉพาะอย่างยิ่ง คุณปรารธนา คชินทร ที่ได้ช่วยพิมพ์ตำราเล่มนี้ด้วยความวิริยะอุตสาหะ และด้วยความอดทนยิ่ง

คำนำ (พิมพ์ครั้งที่ 2)

ตำราเล่มนี้ได้ใช้ประกอบการสอนนักศึกษาชั้นปีที่ 1 มาตั้งแต่ ปีการศึกษา 2541 จนถึงปัจจุบัน มีนักศึกษาเรียนวิชาแคลคูลัส 1 มาแล้ว 3 รุ่น พบว่ายังมีปัญหาบางอย่าง เช่น นักศึกษาขาดความคล่องตัว ในการประสานความรู้พื้นฐานกับเนื้อหาใหม่ที่เกิดขึ้น ในการปรับปรุงตำราครั้งนี้ผู้เขียนจึงได้เพิ่มการทบทวน เนื้อหาพื้นฐานไว้ในภาคผนวก ทั้งนี้ได้ตรวจทานและแก้ไขข้อผิดพลาดในการพิมพ์ครั้งก่อนไว้แล้วด้วย

ผู้เขียนขอขอบคุณ อาจารย์ สุชลา ชูสงแสง ที่กรุณาสร้างแบบฝึกหัดในส่วนภาคผนวก และได้ให้ คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงตำราครั้งนี้ ขอขอบคุณอาจารย์ กิตติพงษ์ ไหลภาภรณ์ อาจารย์ เบญจวรรณ สิงห์ภู ที่ได้กรุณาให้ข้อเสนอแนะและตรวจสอบความถูกต้องให้ตลอดทั้งเล่ม ขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ อรรถจัน บัณฑิต ที่สนับสนุนให้การพิมพ์ตำรานี้ลุล่วงไปด้วยดี ขอขอบคุณ เจ้าหน้าที่ศูนย์บริการการศึกษาโดยเฉพาะอย่างยิ่ง คุณวิมนต์ บุญแสง และคุณนำชัย แซ่หลี่ ที่ได้ช่วยพิมพ์ แก้ไขตำราเล่มนี้ให้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น

เมษายน 2544

คำนำ (พิมพ์ครั้งที่ 3)

ตำราเล่มนี้เป็นตำราเรียนเล่มแรกของมหาวิทยาลัย ใช้ประกอบการสอนนักศึกษาชั้นปีที่ 1 อย่างต่อเนื่องตลอดเวลา 12 ปี นับตั้งแต่ปีการศึกษา 2541 ในนามของผู้เรียบเรียงต้องขอบพระคุณ คณาจารย์ทุกท่านที่ได้ใช้ตำรานี้ประกอบการบรรยายและได้ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์อย่างสูง โดยเฉพาะข้อผิดพลาดที่ปรากฏอยู่

ผู้เขียนขอขอบคุณ คณาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติทุกท่าน ที่ร่วมกันปฏิบัติหน้าที่ในการสอนด้วยความมุ่งมั่นโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ดร.กิตติพงษ์ ไหลภากรณ์ ดร.เสนห์ รุจิวรรณ ที่ได้กรุณาให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอนของสาขาวิชา ขอขอบคุณคุณประชา มงคล ผู้จัดการศูนย์หนังสือ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ ที่สนับสนุนในการพิมพ์ตำราเล่มนี้อีกครั้งหนึ่ง ขอขอบคุณกองการกุศลสมบัติ ที่ปรับเปลี่ยนรูปภาพและออกแบบปก คุณนิรมล บุญแสง และคุณอาสาฬห์ ภิรมรศ ที่ช่วยพิมพ์แก้ไขตำราเล่มนี้จนแล้วเสร็จ คุณชนัญชิตา วิชัยดิษฐ์ และคุณปณิศา มุสิกพันธ์ ที่กรุณาพิสูจน์อักษรให้ตลอดทั้งเล่ม

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพิศ ฤทธิแก้ว

สิงหาคม 2553

คำนำ (พิมพ์ครั้งที่ 4)

ตำราเล่มนี้เป็นตำราเรียนเล่มแรกของมหาวิทยาลัย ใช้ประกอบการสอนนักศึกษาชั้นปีที่ 1 มาอย่างต่อเนื่องตลอดเวลา 15 ปี นับตั้งแต่ปีการศึกษา 2541 เดิมใช้ชื่อว่า แคลคูลัส 1 รหัสวิชา 1205-101 ต่อมา มีการปรับปรุงหลักสูตร เมื่อปีการศึกษา 2549 ได้เปลี่ยนรหัสวิชาเป็น MAT-101 และครั้งล่าสุดมีการปรับปรุงหลักสูตรเมื่อปีการศึกษา 2554 จึงเปลี่ยนชื่อเป็นรายวิชาคณิตศาสตร์ 1 รหัสวิชา MAT-107 ซึ่งยังคงเนื้อหาเดิมไว้ ในนามของผู้เรียบเรียงต้องขอขอบคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ใช้ตำรานี้ประกอบการบรรยายและแนะนำให้นักศึกษาใช้ทบทวนค้นคว้าเพิ่มเติมนอกเหนือจากการฟังบรรยายในชั้นเรียน

ผู้เขียนขอขอบคุณ คุณประชา มงคล ผู้จัดการศูนย์หนังสือ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ ที่สนับสนุนการพิมพ์ตำราเล่มนี้อีกครั้งหนึ่ง ขอขอบคุณคุณโองการ เจ้าหน้าที่วิเคราะห์ระบบคอมพิวเตอร์ศูนย์บริการการศึกษา ที่ปรับเปลี่ยนรูปภาพและออกแบบปก คุณณิรมล บุญแสง ที่ดำเนินการปรับปรุงต้นฉบับจนแล้วเสร็จ และขอบคุณผู้ที่เกี่ยวข้องทุกท่านที่มีส่วนร่วมให้ตำราเล่มนี้ดำรงอยู่อีกครั้งหนึ่ง

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพิศ ฤทธิ์แก้ว

เมษายน 2556

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 : ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	
1.1 บทนำ	1
1.2 ลิมิตของฟังก์ชัน	5
1.3 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต	16
1.4 ลิมิตซ้ายและลิมิตขวา	22
1.5 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	27
1.6 ลิมิตที่อนันต์และลิมิตอนันต์	33
1.7 ความต่อเนื่อง	40
บทที่ 2 : อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	
2.1 ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน	49
2.2 สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์	54
2.3 อนุพันธ์อันดับสูง	56
2.4 กฎลูกโซ่	62
2.5 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย	65
2.6 ค่าเชิงอนุพันธ์	69
บทที่ 3 : การประยุกต์อนุพันธ์	
3.1 อัตราสัมพัทธ์	77
3.2 การประยุกต์ใช้อนุพันธ์ในการวางแผนโค้ง	83
3.3 การประยุกต์ใช้อนุพันธ์ในการหาค่าสุดขีด	91
3.4 วิธีการของนิวตัน	116
บทที่ 4 : การหาปริพันธ์	
4.1 แนวคิดเรื่องการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง	124
4.2 ความหมายของปริพันธ์	132
4.3 ฏนิยามอนุพันธ์ทั่วไป	139
4.4 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส	144
4.5 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า	148
4.6 การประยุกต์ปริพันธ์เพื่อหา พื้นที่ ปริมาตร และความยาว ส่วนของเส้นโค้ง	153
4.6.1 พื้นที่ของบริเวณในระนาบ	153

	หน้า
4.6.2 การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง	156
4.6.3 การหาปริมาตร	164
4.6.4 การหาปริมาตรของทรงตันเมื่อทราบพื้นที่หน้าตัด	165
4.6.5 การหาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน	169
4.6.6 การหาความยาว ส่วนของเส้นโค้ง	182
บทที่ 5 : การหาอนุพันธ์และการหาปริพันธ์ฟังก์ชันอดิศัย	
5.1 อนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	189
5.2 อนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	205
5.3 อนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	215
5.4 อนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	226
5.5 อนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน	233
บทที่ 6 : เทคนิคของการหาปริพันธ์	
6.1 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ	238
6.1.1 ปริพันธ์ที่มีพจน์ในรูป $\sqrt{a^2 - x^2}$	238
6.1.2 ปริพันธ์ที่มีพจน์ในรูป $\sqrt{a^2 + x^2}$	239
6.1.3 ปริพันธ์ที่มีพจน์ในรูป $\sqrt{x^2 - a^2}$	240
6.2 การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน	242
6.3 การหาปริพันธ์โดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย	246
บทที่ 7 : ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	
7.1 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ 1	251
7.2 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ 2	254
7.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม	256
ภาคผนวก	279
บรรณานุกรม	296
ดัชนี	297

บทที่ 1

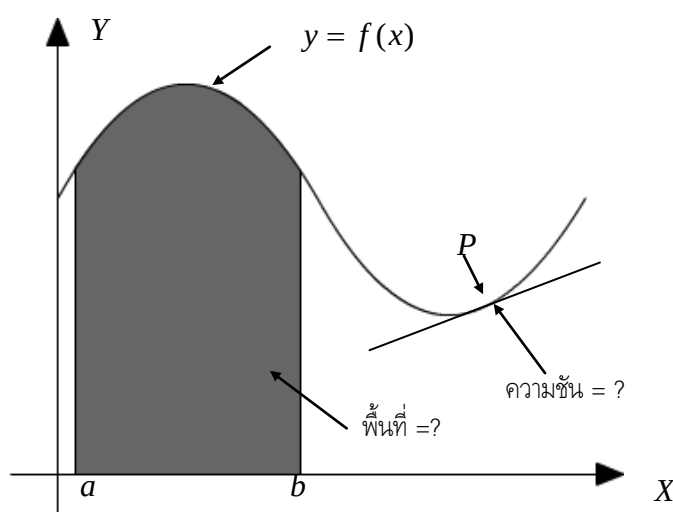
ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.1 บทนำ

แคลคูลัสที่กล่าวถึงในที่นี้เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่ง ที่เกี่ยวข้องกับการประมาณ ประกอบด้วย 2 แขนงใหญ่ ๆ คือ **แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์** (differential calculus) ซึ่งศึกษาเกี่ยวกับเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน การหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง กับ **แคลคูลัสเชิงปริพันธ์** (integral calculus) ซึ่งเกี่ยวข้องกับปัญหาเรื่อง การหาพื้นที่ การหาปริมาตร ตลอดจนการหาความยาวส่วนของเส้นโค้ง แคลคูลัสทั้ง 2 แขนงนี้ จะต้องอาศัยขอบเขตการของลิมิตเข้ามาอธิบาย เราจึงต้องสร้างความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับแนวคิดของลิมิตเสียก่อน ก่อนที่จะกล่าวถึงเรื่องราวของลิมิตในรายละเอียด จะยกตัวอย่างปัญหาพื้นฐาน 2 ปัญหา ซึ่งเป็นจุดตั้งต้นให้แคลคูลัสกำเนิดขึ้น

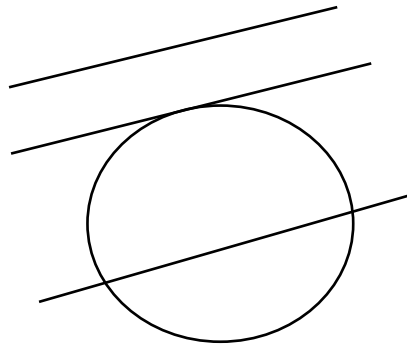
ปัญหาที่ 1 เป็นปัญหาของการหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P ซึ่งกำหนดให้
 ดังรูปที่ 1.1.1

ปัญหาที่ 2 เป็นปัญหาของการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$
 ดังรูปที่ 1.1.1

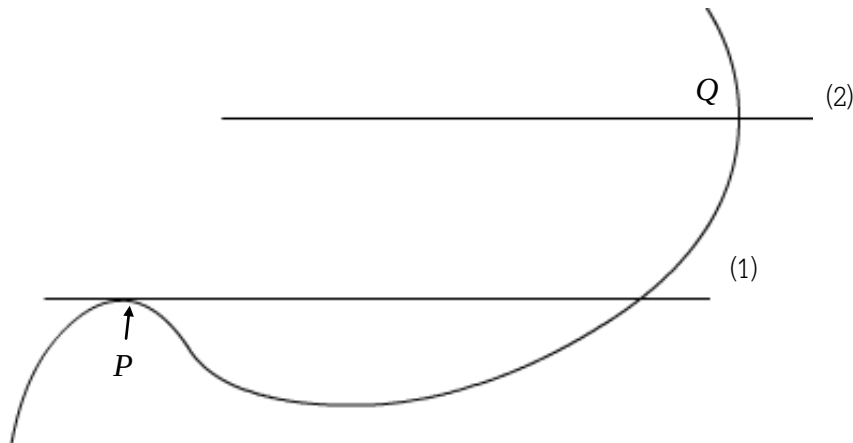


รูปที่ 1.1.1

ก่อนที่จะหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เราลองมาให้ความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเสียก่อนว่าคืออะไร ในกรณีของวงกลมไม่มีความยุ่งยากที่จะกล่าวถึง เส้นสัมผัสวงกลม (ดังรูปที่ 1.1.2) ซึ่งก็คือเส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียว (เส้นตรงที่ไม่ใช่เส้นสัมผัสวงกลมอาจเป็นเส้นตรงที่ตัดวงกลม 2 จุด หรือไม่ตัดวงกลมเลย) จึงเกิดคำถามว่า เส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดหนึ่งจุดใด หมายถึง เส้นตรงที่สัมผัส (ตัด) กับเส้นโค้งนั้น ณ จุดที่กำหนดให้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ใช่หรือไม่ เพื่อเป็นการตอบคำถามนี้ขอให้พิจารณาจากรูปที่ 1.1.3



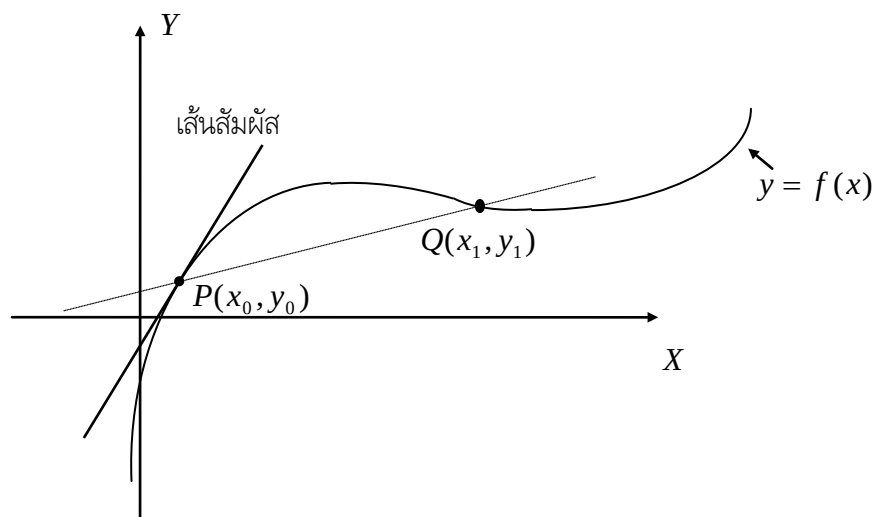
รูปที่ 1.1.2



รูปที่ 1.1.3

ในรูปที่ 1.1.3 เส้นตรงหมายเลข (1) เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P แต่เส้นตรงหมายเลข (2) ไม่ใช่เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด Q

ในราว ค.ศ. 1630 Pierre de Fermat นักคณิตศาสตร์ ชาวฝรั่งเศส ได้ให้ความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งไว้ดังนี้



รูปที่ 1.1.4

พิจารณาจากรูปที่ 1.1.4 กำหนดให้ $P(x_0, y_0)$ เป็นจุดๆ หนึ่งบนเส้นโค้ง $y = f(x)$

ให้ $Q(x_1, y_1)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นโค้งนี้เช่นกัน ลากเส้นตัด (secant line) PQ เมื่อเคลื่อนที่จุด Q เข้าใกล้จุด P ตามแนวเส้นโค้ง $y = f(x)$ (ซึ่งเส้นโค้งต้องไม่ขาดตอนบริเวณใกล้ๆ จุด P) พบว่าเส้นตรง PQ จะเคลื่อนไปสู่ตำแหน่งจำกัด (limiting position) เรียกเส้นตรงที่ผ่านจุด P และอยู่ในแนวตำแหน่งจำกัดนี้ว่า **เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P**

เนื่องจากความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q เท่ากับ $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ถ้า $x_1 \neq x_0$

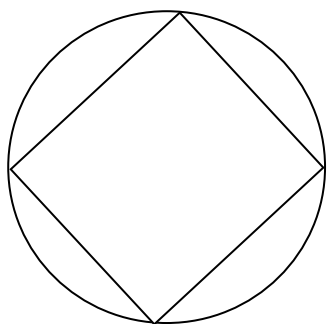
เมื่อ Q เคลื่อนที่เข้าใกล้ P (x_1 เข้าใกล้ x_0) จะพบว่าความชันของเส้นตรง PQ เข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P

ข้อความข้างต้นเปลี่ยนเป็นประโยคสัญลักษณ์ ได้ว่า

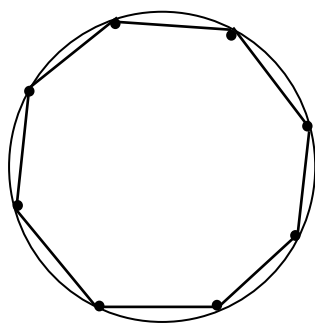
ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P = \lim_{Q \rightarrow P}$ ความชันของเส้นตัด PQ

$$\begin{aligned} &= \lim_{Q \rightarrow P} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

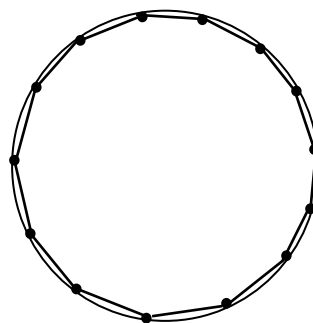
สำหรับปัญหาของการหาพื้นที่นั้นนี้มีมานานแล้วตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ ได้มีการหาสูตรสำหรับพื้นที่สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม วงกลม และรูปหลายเหลี่ยมอื่นๆ ในที่นี้จะให้แนวคิดของการหาสูตรพื้นที่วงกลม



(ก)



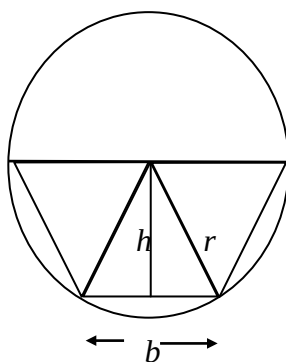
(ข)



(ค)

รูปที่ 1.1.5

มีการประมาณพื้นที่วงกลมด้วยพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสแนบในวงกลมดังรูปที่ 1.1.5 (ก) และได้ปรับปรุงการประมาณให้ดีขึ้นโดยใช้พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมดังรูปที่ 1.1.5 (ข) และ (ค)



รูปที่ 1.1.6

ในรูปที่ 1.1.6 ให้ $A(Q_n)$ แทนพื้นที่ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งคำนวณได้จากผลรวมของพื้นที่สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งแต่ละรูปมีฐานเป็น b และความสูงเป็น h

ให้ p แทนความยาวเส้นรอบรูปของรูป n เหลี่ยมนั้น จะได้

$$\begin{aligned} A(Q_n) &= \frac{1}{2}hb + \frac{1}{2}hb + \dots + \frac{1}{2}hb \quad (n \text{ ครั้ง}) \\ &= \frac{1}{2}h(b + b + \dots + b) = \frac{1}{2}hp \end{aligned}$$

ให้ c แทนความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม ดังนั้น $c = 2\pi r$ จะได้ว่าเมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีที่สิ้นสุด h มีค่าเข้าใกล้ r และ p มีค่าเข้าใกล้ c

ดังนั้น $A(Q_n)$ มีค่าเข้าใกล้พื้นที่ของวงกลม เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีที่สิ้นสุด ซึ่งเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ของวงกลมรัศมี } r &= \lim_{n \rightarrow \infty} A(Q_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}hp \\ &= \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2} r(2\pi r) = \pi r^2\end{aligned}$$

1.2 ลิมิตของฟังก์ชัน

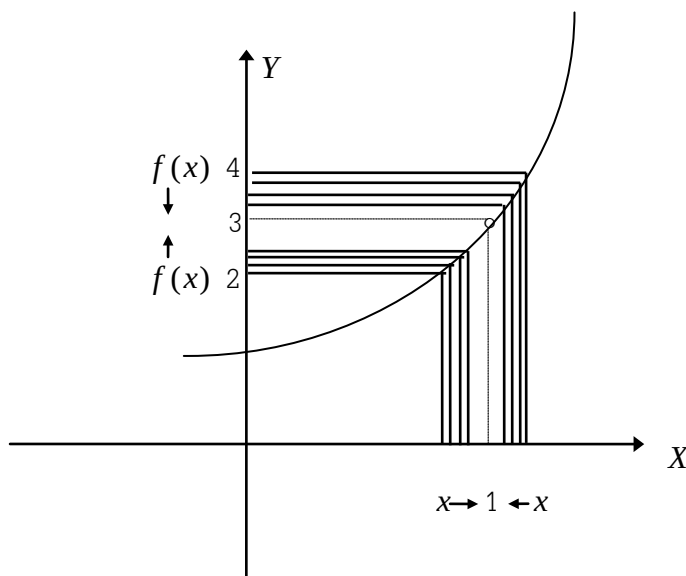
เราเริ่มต้นศึกษาเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน โดยสังเกตว่า $f(x)$ จะเป็นอย่างไร เมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริง a จากนั้นจึงให้ความหมายที่รัดกุมของลิมิต และกล่าวถึงทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

พิจารณา $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

สังเกตว่า 1 ไม่อยู่ในโดเมนของ f เพราะสูตรนี้ใช้ได้เฉพาะกรณีที่ $x \neq 1$ และสำหรับ x ใดๆ ที่ไม่ใช่ 1 เราคำนวณค่า $f(x)$ ได้เสมอ จึงเกิดคำถามว่า $f(x)$ มีค่าเป็นอย่างไร เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ลองพิจารณาแนวทางของคำตอบต่อคำถามข้างต้น จากตารางและกราฟในรูปที่ 1.2.1

x	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	⋮
↑	⋮
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

ตารางที่ 1.2.1



รูปที่ 1.2.1

จากตารางและกราฟข้างต้น พอจะสรุปได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

อ่านว่า **ลิมิตของ** $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้ 1 มีค่าเป็น 3**

โดยทั่วไป เมื่อ a และ L เป็นจำนวนจริง เราใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ แทนความหมายว่า เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เรียก L ว่า **ลิมิตของฟังก์ชัน f ที่จุด a** ลองพิจารณาการหาลิมิตของฟังก์ชันจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.1 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

(ก) $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7)$

(ข) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

วิธีทำ (ก) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 นั้น $(3x - 7)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 5

จึงได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$

(ข) สังเกตว่า $\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ ไม่มีความหมายเมื่อ $x = 3$ อย่างไรก็ตามเราสนใจเฉพาะ

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 โดยอาศัยการแยกตัวประกอบจะได้

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = x + 2 \quad \text{ถ้า } x \neq 3$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 2 = 5$$

ตัวอย่างที่ 1.2.2 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

วิธีทำ โดยอาศัยแนวคิดจากตัวอย่างที่ 1.2.1(ข) จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1 = 2$$

ตัวอย่างที่ 1.2.3 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้เราไม่สามารถใช้การแยกตัวประกอบหรือความรู้ทางพีชคณิตมาทำให้ฟังก์ชัน $\frac{\sin x}{x}$ ง่ายขึ้นในการหาลิมิต โดยอาศัยเครื่องคำนวณช่วยในการพิจารณา ผลที่ได้เป็นไปตามตารางที่ 1.2.2 ดังนี้

x	$\frac{\sin x}{x}$
1.0	0.84147
0.5	0.95885
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	⋮
0	
↑	⋮
-0.01	0.99998
-0.1	0.99833
-0.5	0.95885
-1.0	0.84147

ตารางที่ 1.2.2

เราสามารถสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (การพิสูจน์อย่างละเอียดจะแสดงไว้ในหัวข้อ 1.5)

ข้อสังเกต โดยอาศัยเครื่องคำนวณหรือตารางแสดงค่าฟังก์ชัน สำหรับการพิจารณาลิมิตของฟังก์ชันนั้น ในบางครั้งอาจนำไปสู่ข้อสรุปที่ผิดพลาดได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.4 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \frac{\cos x}{10,000})$

วิธีทำ พิจารณาค่าของ $x^2 - \frac{\cos x}{10,000}$ จากตารางที่ 1.2.3

x	$x^2 - \frac{\cos x}{10,000}$
± 1	0.99995
± 0.5	0.24981
± 0.1	0.00990
± 0.01	0.000000005
$\downarrow$	
0	

ตารางที่ 1.2.3

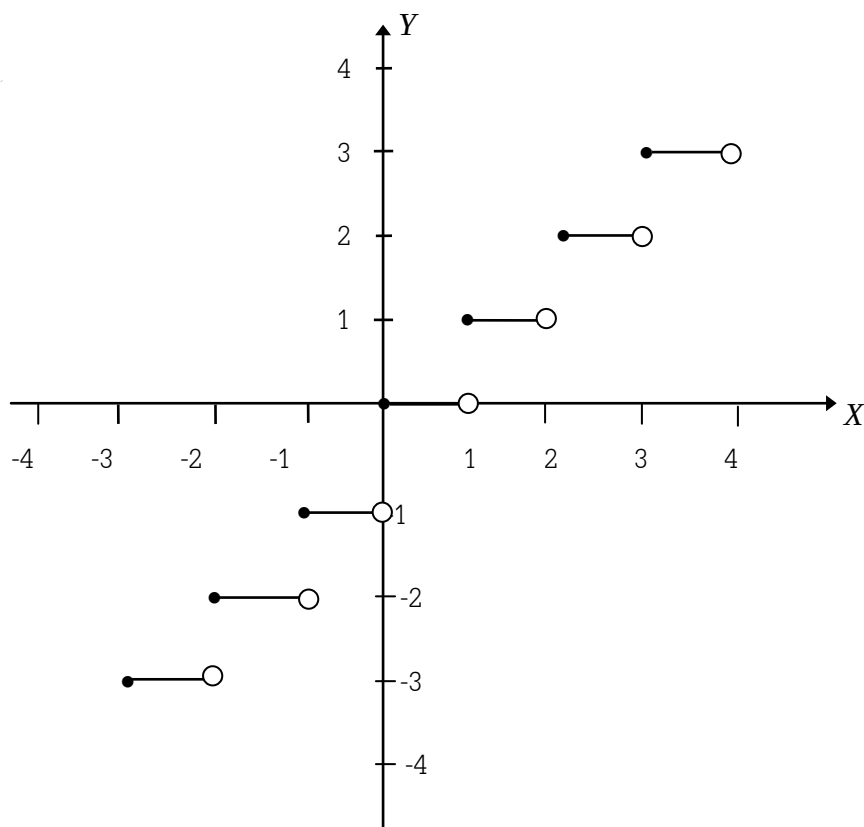
ผลที่ปรากฏในตารางน่าจะสรุปว่า $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \frac{\cos x}{10,000}) = 0$ (ซึ่งไม่ถูกต้อง) หากเรานึกถึงกราฟของ

$$y = \cos x \text{ เมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 0 \text{ พบว่า } \cos x \text{ เข้าใกล้ } 1 \text{ จึงได้ว่า } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \frac{\cos x}{10,000}) = \frac{-1}{10,000}$$

ตัวอย่างที่ 1.2.5 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$

($[x]$ หมายถึง จำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x)

วิธีทำ พิจารณากราฟของ $y = [x]$ จากรูปที่ 1.2.2



รูปที่ 1.2.2

เมื่อ x เข้าใกล้ 2 แต่ x มากกว่า 2 จะเห็นว่า $[x]$ มีค่าเป็น 2 และ

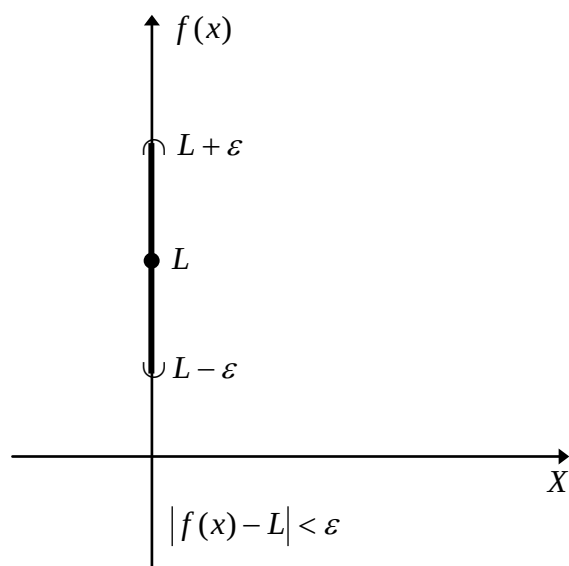
เมื่อ x เข้าใกล้ 2 แต่ x น้อยกว่า 2 จะได้ $[x]$ มีค่าเป็น 1

เราไม่สามารถบอกได้ว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 2 แล้ว $[x]$ จะเข้าใกล้จำนวนจริงค่าใด ในลักษณะเช่นนี้
กล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ ไม่มีค่า หรือ $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ หาค่าไม่ได้

จากตัวอย่างที่ผ่านมา เราจะเห็นแนวทางในการพิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน แต่ก็ยังขาดความชัดเจน
ในแง่ของความหมาย เพราะคำกล่าวที่ว่า $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น ยังหาเกณฑ์มาตัดสิน
คำว่า “เข้าใกล้” ไม่ได้ จึงมีความจำเป็นที่จะต้องกำหนดบทนิยามที่รัดกุม

สำหรับจำนวนจริง a กับ L ประโยคสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ มีความหมายว่า เราสามารถทำให้ระยะห่างระหว่าง $f(x)$ กับ L น้อยเท่าไรก็ได้ เมื่อ x กับ a ห่างกันน้อยพอ

โดยทั่วไปเราใช้อักษรกรีก ε (epsilon) และ δ (delta) แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ การกล่าวว่า $f(x)$ ห่างจาก L น้อยกว่า ε มีความหมายเดียวกับ $|f(x) - L| < \varepsilon$ หรือ $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ หรือ $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ดังแสดงในรูปที่ 1.2.3

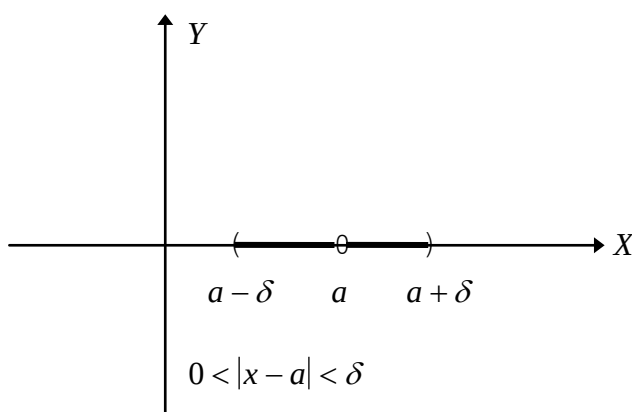


รูปที่ 1.2.3

ในทำนองเดียวกัน การกล่าวว่า x เข้าใกล้ a (แต่ x ไม่ใช่ a) นั้น สามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้คือ

$$0 < |x - a| < \delta$$

สังเกตว่า $|x - a| < \delta$ หมายถึง $a - \delta < x < a + \delta$ และ $0 < |x - a|$ นั้นแสดงให้เห็นว่า $x \neq a$ ดังรูปที่ 1.2.4



รูปที่ 1.2.4

บทนิยามที่ 1.2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งนิยามบนเซต S โดยที่ $S \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจำนวนจริง ซึ่งมี

คุณสมบัติว่าทุกๆ ช่วงเปิด $I \subseteq \mathbb{R}$ ถ้า $a \in I$ แล้ว $I \cap (S - \{a\}) \neq \emptyset$

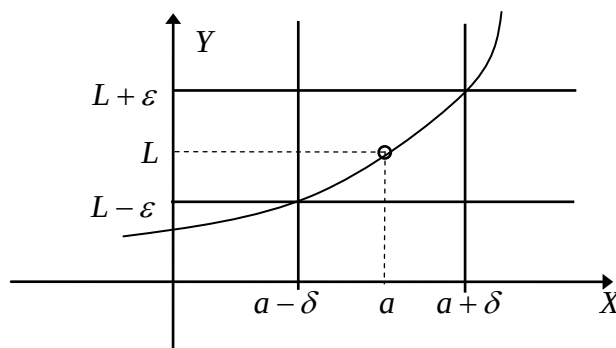
เรากล่าววลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a มีค่าเป็นจำนวนจริง L เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

ก็ต่อเมื่อ ไม่ว่าจะกำหนด $\varepsilon > 0$ ใด ๆ จะสามารถหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ได้ว่าสำหรับทุก ๆ $x \in D_f$

ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$ นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \forall x \in D_f (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

สามารถให้ความหมายเชิงเรขาคณิตของบทนิยาม 1.2.1 ดังรูปที่ 1.2.5



รูปที่ 1.2.5

เราจะใช้บทนิยามที่ 1.2.1 ในการพิสูจน์ลิมิตของฟังก์ชันในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.6 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$

แนวคิด กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ จะหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$0 < |x - 4| < \delta \rightarrow |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } |(3x - 7) - 5| < \varepsilon &\leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon \\ &\leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon \\ &\leftrightarrow |3| |x - 4| < \varepsilon \\ &\leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้นหากเราเลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ ก็จะได้ $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$

การพิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$

$$\text{เลือก } \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ในโดเมนของ f ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $0 < |x - 4| < \delta$ จะได้ว่า

$$|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3|x - 4| < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

ข้อสังเกต การพิสูจน์ตัวอย่างนี้ยังคงเป็นจริง ถ้าเราเลือก δ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ที่น้อยกว่า $\frac{\varepsilon}{3}$

ตัวอย่างที่ 1.2.7 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow c} |x| = |c|$, $c \in \mathbb{R}$

แนวคิด กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จะหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$0 < |x - c| < \delta \rightarrow ||x| - |c|| < \varepsilon$$

เพราะว่า $||x| - |c|| \leq |x - c|$ และ $|x - c| < \delta$

ถ้าต้องการให้ $||x| - |c|| < \varepsilon$ อาจเลือก $\delta = \varepsilon$ หรือ δ เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ที่น้อยกว่า ε

การพิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \varepsilon$

ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในโดเมนของ f ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $0 < |x - c| < \delta$ จะได้ว่า

$$||x| - |c|| \leq |x - c| < \delta = \varepsilon$$

ตัวอย่างที่ 1.2.8 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

แนวคิด สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใดๆ จะต้องหา δ ซึ่งทำให้

$$0 < |x - 2| < \delta \rightarrow \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$$

พิจารณาเมื่อ $x \neq 2$

$$\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(2x+1) - 5| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2(x-2)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 2|x-2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{หากเลือก } \delta = \frac{\varepsilon}{2} \text{ ก็จะได้ } \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

$$\text{เลือก } \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในโดเมนของ f ซึ่ง $0 < |x-2| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} - 5 \right| &= \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| \\ &= |2x+1-5| = |2(x-2)| \\ &= 2|x-2| < 2\delta = 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.2.9 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x - 5) = 7$

แนวคิด สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ จะหาจำนวนจริงบวก δ ซึ่ง

$$\text{ถ้า } 0 < |x-3| < \delta \text{ แล้ว } |(x^2 + x - 5) - 7| < \varepsilon$$

พิจารณา

$$|(x^2 + x - 5) - 7| = |x^2 + x - 12| = |x+4||x-3|$$

จาก $|x-3| < \delta$ จะได้ว่า $-\delta < x-3 < \delta$ หรือ

$$-\delta + 7 < x+4 < \delta + 7$$

$$-(\delta + 7) < x+4 < \delta + 7 \quad (\because -(\delta + 7) < -\delta + 7)$$

นั่นคือ

$$|x+4| < \delta + 7$$

$$\text{จึงได้ว่า } |x+4||x-3| < (\delta + 7)\delta$$

$$\text{ถ้าให้ } (\delta + 7)\delta = \varepsilon \quad \text{จะได้ } \delta = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4\varepsilon}}{2}$$

$$\text{เราเลือก } \delta = \frac{-7 + \sqrt{49 + 4\varepsilon}}{2} \quad (\because \delta \text{ ต้องมากกว่า } 0)$$

$$\text{จะได้ } |x^2 + x - 12| = |x+4||x-3| < (\delta + 7)\delta$$

$$= \left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{49 + 4\varepsilon}}{2} \right) \left(\frac{-7}{2} + \frac{\sqrt{49 + 4\varepsilon}}{2} \right) = \varepsilon$$

การพิสูจน์

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

$$\text{เลือก } \delta = \frac{-7 + \sqrt{49 + 4\varepsilon}}{2}$$

ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในโดเมนของ f ซึ่ง $0 < |x-3| < \delta$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |(x^2 + x - 5) - 7| &= |x^2 + x - 12| = |x-3||x+4| < \delta(\delta + 7) \\ &= \left(-\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{49 + 4\varepsilon}}{2} \right) \left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{49 + 4\varepsilon}}{2} \right) = \varepsilon \end{aligned}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1.2.9 เราสามารถที่จะทำให้ $|x-3||x+4| < \varepsilon$ ได้อีกวิธีหนึ่ง โดยการ

กำหนดค่าของ δ ไว้ก่อน เช่น ให้ $\delta \leq 1$

เพราะว่า $|x-3| < \delta \leq 1$ ดังนั้น

$$|x+4| = |x-3+7| \leq |x-3| + |7| < 1 + 7 = 8$$

จึงได้ว่า

$$|x+4||x-3| < 8\delta \text{ หากเลือก } \delta \leq \frac{\varepsilon}{8} \text{ ด้วย ก็จะได้ } |x+4||x-3| < \varepsilon$$

ในตัวอย่างที่ 1.2.9 อาจแสดงการพิสูจน์ได้อีกแบบหนึ่งดังนี้

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

$$\text{เลือก } \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{8}\right\} \text{ ดังนั้น } \delta \leq 1 \text{ และ } \delta \leq \frac{\varepsilon}{8}$$

สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ในโดเมนของ f ซึ่ง $0 < |x-3| < \delta$ จะได้ว่า

$$|(x^2 + x - 5) - 7| = |x^2 + x - 12| = |x-3||x+4| < 8\delta \leq \varepsilon$$

ในตัวอย่างต่อไปจะละการแสดงแนวคิดไว้

ตัวอย่างที่ 1.2.10 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow c} x^2 = c^2, c \in \mathbb{R}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

$$\text{เลือก } \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|c|}\right\}$$

ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ในโดเมนของ f ซึ่ง $0 < |x-c| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x^2 - c^2| &= |x-c||x+c| = |x-c||x-c+2c| \\ &\leq |x-c|(|x-c| + 2|c|) \\ &< \delta(1+2|c|) \leq (1+2|c|) \frac{\varepsilon}{1+2|c|} = \varepsilon \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 1.1

ในข้อ 1-5 จงเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาขีดจำกัดด้วย

1. $f(x) = 5 - x$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

2. $g(x) = x^2 + 2x + 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

3. $f(t) = \begin{cases} -2 & \text{ถ้า } t < 0 \\ t^2 + 1 & \text{ถ้า } t \geq 0 \end{cases}$; $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$

4. $h(x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 10} h(x)$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{ถ้า } x \neq 1 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 1 \end{cases}$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

6. จงใช้บทนิยามของขีดจำกัดพิสูจน์ว่าขีดจำกัดต่อไปนี้จริง

6.1 $\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 2 = 4$

6.2 $\lim_{x \rightarrow -1} 5 - 3x = 8$

6.3 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

6.4 $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2x = -1$

6.5 $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$

1.3 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

การใช้นิยามในการพิจารณาลิมิตของฟังก์ชันค่อนข้างยุ่งยาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งหากฟังก์ชันมีความซับซ้อน จึงต้องหาเครื่องมือที่ช่วยให้การหาลิมิตของฟังก์ชันทำได้โดยง่าย การศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีต่างๆ ของลิมิต จะช่วยให้การแก้ปัญหาดังกล่าวสะดวกขึ้น

กำหนดให้ c เป็นค่าคงตัว a L และ M เป็นจำนวนจริง

ทฤษฎีบทที่ 1.3.1 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้แล้ว ลิมิตมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น นั่นคือ

$$\text{ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = M \quad \text{แล้ว} \quad L = M$$

ทฤษฎีบทที่ 1.3.2

$$1. \text{ ถ้า } f(x) = c \quad \text{แล้ว} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$2. \text{ ถ้า } f(x) = x \quad \text{แล้ว} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$3. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{แล้ว} \quad \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$$

ทฤษฎีบทที่ 1.3.3 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ แล้ว

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L^n \quad n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}; \quad \text{เมื่อ } M \neq 0$$